# ÜBER DIE REGULARITÄT SCHWACHER LÖSUNGEN DES SYSTEMS

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v$$

INAUGURAL–DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

1980

vorgelegt von
MICHAEL GRÜTER
aus Duisburg

Düsseldorf 1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543926_0106

# ÜBER DIE REGULARITÄT SCHWACHER LÖSUNGEN DES SYSTEMS

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v$$

INAUGURAL–DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
MICHAEL GRÜTER
aus Duisburg

Düsseldorf 1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt


| | | |
|---|---|---|
| Einleitung | | 2 |
| § 1 | Notationen und Hilfssätze | 6 |
| § 2 | Partielle Regularität der Lösungen | 17 |
| § 3 | Die Regularität von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung | 41 |
| §4 | Beispiele | 56 |
| Zusammenfassung | | 61 |
| Literaturverzeichnis | | 62 |

## Einleitung

Wir behandeln in dieser Arbeit das folgende Problem:

Gegeben sei eine schwache Lösung x des Systems

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \quad ,$$

wobei x eine Abbildung aus der Ebene mit Werten im $\mathbb{R}^3$ ist, die quadratintegrable erste Ableitungen besitzt, und H für eine reellwertige Funktion auf dem dreidimensionalen Raum steht.

Wir untersuchen dann die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen (z.B. an H) die schwache Lösung x regulär ist, d.h. welche Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften sie besitzt.

Bei der direkten Methode der Variationsrechnung und in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es üblich, zunächst sogenannte "schwache" Lösungen zu produzieren, deren Existenz man mit relativ einfachen Mitteln zeigen kann. Man steht dann allerdings vor der Aufgabe nachzuweisen, daß diese "schwachen" Lösungen in Wirklichkeit schon "klassische" Lösungen sind.

Geht man von der allgemeinen Theorie aus, so erkennt man, daß das obige System ein Spezialfall eines elliptischen Differentialgleichungssystems mit quadratisch wachsender rechter Seite ist. Hierbei bezieht sich der Ausdruck quadratisches Wachstum auf das Wachstum der rechten Seite in Abhängigkeit von den ersten Ableitungen der Lösung.Solche Systeme sind in den letzten Jahren immer mehr in den Mit-

telpunkt des allgemeinen Interesses gerückt. Dieses Phänomen hat mehrere Gründe. Zum einen führen viele geometrische Probleme, wie z.B. die Untersuchung harmonischer Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten oder die Frage nach Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung, auf Systeme dieser Form. Zum anderen bietet die Behandlung von Systemen mit quadratisch wachsender rechter Seite besondere Schwierigkeiten.

Ich möchte auf diese Probleme hier nicht näher eingehen, sondern auf die folgenden Arbeiten verweisen [14],[15],[27], [28],[29],[O8],[O9],[16],[O7] und nur erwähnen, daß im allgemeinen nicht einmal die Stetigkeit beschränkter Lösungen nachgewiesen werden kann.

Es stellt sich nun die Frage, ob man nicht auf die sehr einschränkenden Voraussetzungen, unter denen man im allgemeinen Fall die Regularität beweist, im Fall der speziellen Struktur unseres Systems verzichten oder sie abschwächen kann. Die sehr spezielle Struktur des von uns behandelten Systems erklärt sich aus der Tatsache, daß die Gleichung im Fall von konformen Parametern (u,v) eine geometrische Bedeutung hat. Ist nämlich $|x_u|^2 = |x_v|^2 \neq 0 = x_u \cdot x_v$, so gibt die Zahl H(x(u,v)) die Größe der mittleren Krümmung der Fläche x im Punkte x(u,v) an.

Diese geometrische Betrachtungsweise liefert nun in einem sehr allgemeinen Sinn den Schlüssel zum Regularitätsproblem.

Eine sehr wichtige Rolle bei den Regularitätsbeweisen spielt

die isoperimetrische Ungleichung (die ja bekanntlich zu einer Sobolev-Ungleichung äquivalent ist) .

Meine Arbeit besteht im wesentlichen aus drei Teilen.

In einem ersten Teil (§2) untersuchen wir das System, ohne das Bestehen der Konformalitätsrelationen vorauszusetzen. Wir beweisen mit einer anderen Methode die schon von Heinz [13] gezeigte partielle Regularität der Lösung und untersuchen genauer die Struktur der Ausnahmemenge. Dieser Satz enthält als Spezialfall die von Wente [25],[26] und Tomi [23] gezeigten Regularitätsergebnisse.

Außerdem zeigen wir in diesem Paragraphen einen Satz, der isolierte Singularitäten von Lösungen dieser Gleichung ausschließt. All diese Ergebnisse deuten natürlich stark darauf hin, daß die Lösungen überhaupt regulär sind.

Im zweiten Teil (§3) gehen wir davon aus, daß die Fläche x konform parametrisiert ist. Da eigentlich erst in diesem Fall eine geometrische Interpretation der Gleichung möglich ist, kann man erwarten, unter natürlicheren Voraussetzungen als in §2 stärkere Resultate zu beweisen. Das ist tatsächlich möglich, und unser Hauptergebnis läßt sich folgendermaßen formulieren:

> Flächen beschränkter mittlerer Krümmung mit endlichem Flächeninhalt sind regulär.

Der Ausdruck "regulär" impliziert insbesondere, daß die Abbildung, durch die die Fläche dargestellt wird, lokal beschränkt ist.

In einem dritten und letzten Teil (§4) analysieren wir anhand von zwei Beispielen die Notwendigkeit der in unserem Satz gemachten Voraussetzungen. Wir geben explizite Darstellungen von rotationssymmetrischen Flächen im dreidimensionalen Raum, die beide über der Einheitskreisscheibe konform parametrisiert sind, und von denen die eine endlichen Flächeninhalt, aber unbeschränkte mittlere Krümmung hat, während die Krümmung der anderen beschränkt bleibt, aber ihr Flächeninhalt unendlich wird. Beide Abbildungen haben die Eigenschaft, daß sie außerhalb des Ursprungs analytisch, in jeder Umgebung des Nullpunkts aber unbeschränkt sind. Deshalb lassen sie sich natürlich nicht stetig auf die ganze Einheitskreisscheibe fortsetzen.
Es zeigt sich also, daß unser Satz in der Hinsicht optimal ist, daß seine Voraussetzungen natürlich sind und die Aussage falsch wird, wenn man auf eine der Annahmen verzichtet.
Zu Beginn eines jeden Paragraphen geben wir eine eingehendere Darstellung der erzielten Resultate.

Meinen beiden Lehrern Prof. Dr. Stefan Hildebrandt und Prof. Dr. Klaus Steffen bin ich zu aufrichtigem Dank verpflichtet. Sie gaben die Anregung zu dieser Arbeit und unterstützten mich durch viele wertvolle Diskussionen.

§ 1

Notationen und Hilfssätze

Auch wenn wir in den nachfolgenden Paragraphen nur den Fall n=2 betrachten, formulieren wir die benutzten Sätze und Definitionen für n≥2, damit man sieht, wo es wirklich darauf ankommt, daß man nur zwei Dimensionen hat.

Punkte des $\mathbb{R}^2$ werden bezeichnet mit

$$w = (u,v) \quad \text{oder} \quad z = u + iv \ ;$$

"$\cdot$" ist das Zeichen für das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, während wir mit "$\wedge$" das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren des dreidimensionalen Raumes meinen:

$$x \wedge y := (x^2y^3-x^3y^2, x^3y^1-x^1y^3, x^1y^2-x^2y^1)$$

$$\text{für} \quad x = (x^1,x^2,x^3) \ , \ y = (y^1,y^2,y^3) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Für $p \in \mathbb{R}^n$ sei $B_R(p)$ die offene Kugel vom Radius R um den Punkt p.

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $f:M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine meßbare Funktion, so sei für $p \in [1,\infty[$

$$\|f\|_{L^p(M,\mathbb{R}^m)} := \left[ \int_M |f|^p \, d\mathbb{L}^n \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{und}$$

$$\|f\|_{L^\infty(M,\mathbb{R}^m)} := \operatorname*{ess\,sup}_M |f| \ .$$

Hierbei ist $\mathbb{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. $L^p(M,\mathbb{R}^m)$ ist dann die Bezeichnung für den Banachraum der (Äquivalenzklassen von) Funktionen f , für die $\|f\|_{L^p(M,\mathbb{R}^m)}$ endlich ausfällt.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ , so steht $H_p^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ für den Teilraum von $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, dessen Funktionen Distributionsableitungen bis zur Ordnung k haben, die ebenfalls in $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ liegen. Nimmt man als Norm auf $H_p^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ die Summe der $L^p$-Normen aller partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$, so wird $H_p^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ zu einem Banachraum.
Unter $\overset{\circ}{H}{}_p^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ verstehen wir den Abschluß des Teilraums $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ in $H_p^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$; hierbei betrachten wir nur $p<\infty$.
$C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ist dabei der Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, die kompakten Träger in $\Omega$ haben, d.h. supp f := Abschluß von $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ist kompakte Teilmenge von $\Omega$.
Für $k \in \mathbb{N}_o$ und $\alpha \in ]0,1]$ ist $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ der Raum der k mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\Omega$ ,deren k-te partielle Ableitungen lokal hölderstetig mit dem Exponenten $\alpha$ sind.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $H \in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.
Wir sagen, daß $x \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung des Systems

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \tag{1.1}$$

ist, falls :
Für jedes $\phi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla x \cdot \nabla \phi + 2H(x)\phi \cdot (x_u \wedge x_v)\, d\mathbb{L}^2 = 0 \,. \tag{1.2}$$

Dabei ist $\nabla x = (x_u, x_v)$ .
Ein Approximationsschluß liefert, daß (1.2) auch für jedes

$\phi \in \overset{o}{H}{}^1_2(\Omega,\mathbb{R}^3) \cap L^\infty$ gilt.

Um die Struktur der Ausnahmemengen besser untersuchen zu können, definieren wir den Begriff der s-Kapazität.

(1.3) DEFINITION

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $s \in [1,n]$.

(i) $s<n$

$$c_s(Q) := \inf \{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi|^s \, d\mathbb{L}^n : \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \text{ und } \psi \geq 1 \text{ auf } Q \}$$

heißt die s-Kapazität von Q.

(ii) $s=n$ , $R > 0$ , $Q \subset B_R(0)$

$$c_n^R(Q) := \inf \{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi|^n \, d\mathbb{L}^n : \psi \in C_c^1(B_R(0),\mathbb{R}) \text{ und } \psi \geq 1 \text{ auf } Q \}$$

heißt die n-Kapazität von Q bezüglich der Kugel $B_R(0)$ .

Bemerkung:

In der Definition der Kapazität kann man statt $\psi \in C_c^1$ genauso gut $\psi \in C_c^o \cap H_s^1$ zulassen, wie ein einfacher Approximationsschluß zeigt.

Ist A eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (im Fall s=n mit $\bar{A} \subset B_R(0)$ ) , so setzt man

$$c_s^{(R)}(A) := \sup \{ c_s^{(R)}(Q) : Q \subset A \text{ kompakt} \}.$$

Ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ , $Q_i$ kompakt (im Fall s=n $Q_i \subset B_R(0)$), so gilt

$$c_s^{(R)}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_s^{(R)}(Q_i).$$

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\alpha \geq 0$ sei $\mathbb{H}^\alpha(A)$ das $\alpha$-dimensionale Hausdorff-Maß von A und $\mathbb{H}$-dim(A) die Hausdorffdimension von A, vgl.

Federer [05].

Das folgende Lemma macht eine Aussage über die Beziehung von Kapazität und Hausdorff-Maß. Ein Beweis findet sich bei Federer-Ziemer [06], p. 143,153 ; vgl. dazu auch Wallin [24].

(1.4) LEMMA

(i) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \in ]1,n[$ .

$\mathbf{H}^{n-s}(A) < \infty$ impliziert $c_s(A) = 0$.

(ii) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \in [1,n]$ ($\bar{A} \subset B_R(0)$ für $s=n$).

$c_s^{(R)}(A) = 0$ impliziert $\mathbf{H}\text{-dim}(A) \leq n-s$.

Wir verwenden zur Abkürzung folgende Schreibweise für den Mittelwert einer Funktion f.

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar , $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ meßbar und $\mathbb{L}^n(M)>0$,so sei

$$\fint_M f \, d\mathbb{L}^n := (\mathbb{L}^n(M))^{-1} \int_M f \, d\mathbb{L}^n .$$

(1.5) LEMMA (Poincaré) ( Morrey [19], 3.6.11., 3.2.1.)

Es sei B eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit dem Radius R und $p \in [1,\infty[$.

(i) Für jedes $f \in H_p^1(B,\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\fint_B |f-\bar{f}|^p \, d\mathbb{L}^n \leq C(n,m,p) \, R^p \fint_B |\nabla f|^p \, d\mathbb{L}^n ,$$

wobei $\bar{f} := \fint_B f \, d\mathbb{L}^n$ .

(ii) Für jedes $f \in \overset{o}{H}{}_p^1(B,\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\fint_B |f|^p \, d\mathbb{L}^n \leq C(n,m,p) \, R^p \fint_B |\nabla f|^p \, d\mathbb{L}^n .$$

(1.6) LEMMA (Sobolev) ( Morrey [19], 3.5.5., 3.5.1.)

Es sei B eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit dem Radius R.

(i) Ist $p \in [1,n[$ und $f \in H_p^1(B,\mathbb{R}^m)$ , so gilt

$$\left( \fint_B |f|^{\frac{np}{n-p}} d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq$$

$$C(n,m,p)\left\{ \left( \fint_B |f|^p \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} + R \left( \fint_B |\nabla f|^p \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} \right\} .$$

(ii) Ist $p=n$ und $f \in H^1_n(B,\mathbb{R}^m)$ , so gilt für $q \in [1,\infty[$

$$\left( \fint_B |f|^q \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C(n,m,q)\left\{ \left( \fint_B |f|^n \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{n}} + R \left( \fint_B |\nabla f|^n \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{n}} \right\} .$$

(iii) Ist $p>n$ und $f \in H^1_p(B,\mathbb{R}^m)$ , so gilt
$f \in C^{0,\alpha}(\bar{B},\mathbb{R}^m)$ mit $\alpha = 1-\frac{n}{p}$ und

$$\sup_B |f| \leq$$

$$C(n,m,p)\left\{ \left( \fint_B |f|^p \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} + R \left( \fint_B |\nabla f|^p \, d\,\mathbb{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} \right\} .$$

Der folgende Satz ist die Grundlage einer großen Zahl von Stetigkeitsbeweisen in der Regularitätstheorie.

(1.7) LEMMA (Dirichlet-Growth-Theorem, Morrey [19], 3.5.2.)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in H^1_p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $p \in [1,n]$.
Es gebe $\alpha \in ]0,1[$ und $K>0$, so daß für jede Kugel $B_R \subset \Omega$ gilt

$$\fint_{B_R} |\nabla f|^p \, d\,\mathbb{L}^n \leq K^p R^{p(\alpha-1)} .$$

Dann ist $f \in C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und für jede Kugel $B_R \subset \Omega$ ist

$$\operatorname{osc}_{B_R} f \leq C(n,m,p,\alpha) K R^{\alpha} ,$$

wobei $\operatorname{osc}_{B_R} f$ für die Oszillation von $f$ auf der Kugel $B_R$ steht.

Im Fall n=p=2 benötigt man also eine Ungleichung der Form

$$\int_{B_R} |\nabla f|^2 \, d\mathbb{L}^2 \leq K R^{2\alpha} ,$$

um die Hölderstetigkeit von f zu zeigen.

Wie man von der Stetigkeit schwacher Lösungen des Systems (1.1) auf die höhere Regularität (hier: auf die Hölderstetigkeit der ersten Ableitungen) schließt, zeigt das folgende Resultat, von dem Tomi in [22] einen einfachen Beweis gegeben hat.

(1.8) PROPOSITION

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet und $x \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ sei eine schwache Lösung des Systems

$$\Delta x = f(\cdot,x,\nabla x) ,$$

wobei $f : \Omega \times \mathbb{R}^{3m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Eigenschaft hat, daß $f(\cdot,y,\nabla y)$ eine meßbare Funktion auf $\Omega$ ist für jedes $y \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

f habe quadratisches Wachstum in den ersten Ableitungen,d.h.

$$|f(w,y,p)| \leq \mu(|y|) \, |p|^2$$

für alle $w \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^{2m}$, wobei $\mu$ monoton wachsend ist.

Gibt es dann einen Punkt $a \in \mathbb{R}^m$, so daß

$$\|x-a\|_{L^\infty(\Omega)} \; \mu(\|y\|_{L^\infty(\Omega)}) < \frac{1}{2}$$

ausfällt, so ist $x \in C^{1,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ für jedes $\alpha \in ]0,1[$ .

Bemerkung:

Weiß man bereits die Stetigkeit der schwachen Lösung x von (1.1) in einem Punkt $w_o \in \Omega$, und ist $h_o := \|H\|_{L^\infty}$ ,so

gibt es $0 < R < \operatorname{dist}(w_o, \partial\Omega)$, so daß für $|w-w_o| \le R$ $|x(w)-x(w_o)| < \frac{1}{2h_o}$ . Setzt man $\mu(t) := h_o$, so folgt mit (1.8) sofort $x \in C^{1,\alpha}(B_R(w_o), \mathbb{R}^3)$ für jedes $\alpha \in ]0,1[$.

Wir kommen nun zu einer Form der isoperimetrischen Ungleichung, die eine zentrale Rolle in Regularitätsbeweisen für schwache Lösungen des Systems (1.1) spielt; vgl.[25],[26], [23],[13].

Die klassische isoperimetrische Ungleichung, Federer [05], Ch. 4, für geschlossene Flächen im $\mathbb{R}^3$ besagt

$$V^2 \le c^* A^3 ,$$

wo $c^*$ eine absolute Konstante ist, V das von der Fläche eingeschlossene Volumen bezeichnet und A für den Flächeninhalt steht ( $c^* = \frac{1}{36\pi}$ ist optimal).

Ein elementarer Beweis einer Version dieser Ungleichung wurde von Heinz in [12] gegeben, wo er den folgenden Satz zeigte.

(1.9) PROPOSITION

Es sei B die Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ und $x \in H_2^1(B,\mathbb{R}^3)$ und $z \in \overset{o}{H}{}_2^1(B,\mathbb{R}^3) \cap L^\infty$.

Dann gibt es eine absolute Konstante $c_o$ , so daß

$$\left| \int_B z \cdot (x_u \wedge x_v) \, d\mathbb{L}^2 \right| \le c_o D_B(z)^{(1/2)} D_B(x)$$

$$(D_B(x) := \int_B |\nabla x|^2 \, d\mathbb{L}^2 ).$$

Bemerkung:

Ist $x \in \overset{o}{H}{}_2^1(B,\mathbb{R}^3) \cap C^o(\bar{B})$ konform parametrisiert, so ist

$$V(x) = \frac{1}{3} \left| \int_B x \cdot (x_u \wedge x_v) \, d\mathbb{L}^2 \right|$$

das von x eingeschlossene Volumen und

$$A(x) = \frac{1}{2} D_B(x) = \int_B |x_u \wedge x_v| \, d\mathbb{L}^2$$

der Flächeninhalt von x, so daß der Zusammenhang zwischen (1.9) und der isoperimetrischen Ungleichung offensichtlich ist.

In §2 verwenden wir das folgende Resultat über harmonische Funktionen, dessen einfachen Beweis wir hier geben wollen.

(1.10) PROPOSITION

Es sei $B_r \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in H_2^1(B_r, \mathbb{R}^m)$ sei harmonisch auf $B_r$. Dann gilt für $\rho \in ]0,r]$

$$\int_{B_\rho} |\nabla f|^2 \, d\mathbb{L}^n \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |\nabla f|^2 \, d\mathbb{L}^n \, .$$

Beweis:

O.B.d.A. sei $B_r = B_r(0)$.

Wir setzen $g = |\nabla f|^2$ und beachten, daß g subharmonisch auf $B_r$ ist; sei $r' \in ]\rho, r[$. Auf $B_{r'}$ betrachten wir die harmonische Funktion h zu den Randwerten von g, $h|_{\partial B_{r'}} = g|_{\partial B_{r'}}$. Aus dem Maximumprinzip folgt $g \leq h$ in $B_{r'}$.

Also erhalten wir ($\alpha(n) := \mathbb{L}^n(B_1(0))$ )

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho} g \, d\mathbb{H}^{n-1} \leq \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho} h \, d\mathbb{H}^{n-1} =$$

$$= n\alpha(n) h(0) = \frac{1}{r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}} h \, d\mathbb{H}^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}} g \, d\mathbb{H}^{n-1} \, .$$

Um unsere Behauptung zu erhalten integrieren wir diese

Ungleichung.

$$\frac{1}{\rho^n}\int_{B_\rho}|\nabla f|^2\,d\mathbb{L}^n = \frac{1}{\rho^n}\int_0^\rho\int_{\partial B_s} g\,d\mathbb{H}^{n-1}\,ds =$$

$$\frac{1}{r'\rho^{n-1}}\int_0^{r'}\int_{\partial B_{\frac{\rho}{r'},t}} g\,d\mathbb{H}^{n-1}\,dt =$$

$$\frac{1}{r'^n}\int_0^{r'} t^{n-1}\left[\ (\tfrac{\rho}{r'},t)^{1-n}\int_{\partial B_{\frac{\rho}{r'},t}} g\,d\mathbb{H}^{n-1}\ \right]dt \le$$

$$\frac{1}{r'^n}\int_0^{r'} t^{n-1}\left[\ \frac{1}{t^{n-1}}\int_{\partial B_t} g\,d\mathbb{H}^{n-1}\ \right]dt =$$

$$\frac{1}{r'^n}\int_{B_{r'}}|\nabla f|^2\,d\mathbb{L}^n\ .$$

Der Grenzübergang $r'\to r$ zeigt die gewünschte Ungleichung.

Der nächste Hilfssatz, den wir im folgenden mehrfach benötigen, stammt aus der Arbeit [13] von Heinz. Da wir ihn unter etwas anderen Voraussetzungen formulieren, geben wir hier einen Beweis, der mit diesen Annahmen auskommt.

(1.11) PROPOSITION

Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ offen und $x\in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$.

Ist $w_o\in\Omega$ und $R<\operatorname{dist}(w_o,\partial\Omega)$, so gibt es $r\in[\frac{1}{2}R,R]$ und eine absolute Konstante $C>0$, so daß ( $B_R:=B_R(w_o)$ )

$$\operatorname*{osc}_{\partial B_r} x \le C\left(\int_{B_R}|\nabla x|^2\right)^{(1/2)}$$

und

$$\|x\|_{L^\infty(\partial B_r)} \le C\left(\int_{B_R}|\nabla x|^2 + \fint_{B_R}|x|^2\right)^{(1/2)}\ .$$

Beweis:

O.B.d.A. sei $w_o = 0$.

Wir wählen Polarkoordinaten $(\rho,\theta)$ um O.

Dann gilt

$$\int_{R/2}^{R} \left\{ \int_{0}^{2\pi} |x_\theta|^2 \, d\theta \right\} \frac{1}{\rho} \, d\rho \leq \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |\nabla x|^2 .$$

Für x können wir nach bekannten Sätzen einen Vertreter wählen, so daß $x(\rho,\cdot)$ absolutstetig ist für $\mathbb{L}^1$-fast alle $\rho$. Also gibt es wegen der obigen Ungleichung $r \in [\frac{1}{2}R,R]$ mit

(i) $x(r,\cdot)$ absolutstetig ist auf $[0,2\pi]$,

(ii) $$\int_{0}^{2\pi} |x_\theta(r,\theta)|^2 \, d\theta \leq \left( \int_{B_R} |\nabla x|^2 \right) \left( \int_{R/2}^{R} \frac{d\rho}{\rho} \right)^{-1} \cdot =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_{B_R} |\nabla x|^2 .$$

Für $\theta_1,\theta_2 \in [0,2\pi]$ mit $0 \leq \theta_2-\theta_1 \leq \pi$ gilt dann

$$|x(r,\theta_2)-x(r,\theta_1)| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |x_\theta(r,\theta)| \, d\theta \leq$$

$$\leq (\theta_2-\theta_1)^{1/2} \left( \int_{0}^{2\pi} |x_\theta(r,\theta)|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left( \frac{\pi}{\log 2} \right)^{1/2} \left( \int_{B_R} |\nabla x|^2 \right)^{1/2} ;$$

also, wie behauptet, $\operatorname{osc}_{\partial B_r} x \leq C \left( \int_{B_R} |\nabla x|^2 \right)^{1/2}$ .

Da x natürlich auch aus $H_2^1(B_r,\mathbb{R}^3)$ ist, folgt aus der Stetigkeit der Randabbildung

$$B : H_2^1(B_r,\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\partial B_r,\mathbb{R}^3)$$

und aus Homogenitätsgründen

$$\left( \int_0^{2\pi} |x(r,\theta)|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\left( \int_{B_r} |\nabla x|^2 + \fint_{B_r} |x|^2 \right)^{1/2} ;$$

und da $x(r,\cdot)$ absolutstetig ist, gibt es $\theta_o \in [0,2\pi]$ mit

$$|x(r,\theta_o)| \leq \frac{C}{(2\pi)^{1/2}}\left( \int_{B_r} |\nabla x|^2 + \fint_{B_r} |x|^2 \right)^{1/2} .$$

Weil $r \in [\frac{1}{2}R,R]$, gilt $\fint_{B_r} |x|^2 \leq 4 \fint_{B_R} |x|^2$ , so daß zusammen mit der schon bewiesenen Ungleichung für die Oszillation auch die zweite Abschätzung folgt.

## § 2

## Partielle Regularität der Lösungen

Wir untersuchen die Gleichung

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \tag{2.1}$$

zunächst, ohne die Konformität der Parameter (u,v) vorauszusetzen, d.h. wir sehen von der geometrischen Bedeutung ab.

Das System (2.1) ist dann ein Spezialfall des allgemeineren Systems

$$\Delta x = f(x, \nabla x)\ , \tag{2.2}$$

bei dem die rechte Seite f quadratisch in den ersten Ableitungen von x wächst; setzt man nämlich die Beschränktheit von H voraus, so gilt

$$|f(x,p)| \leq \|H\|_{L^\infty} |p|^2 .$$

Im allgemeinen sind selbst beschränkte Lösungen der Gleichung (2.2) nicht regulär, sondern es ist eine Beziehung zwischen dem Supremum der Lösung, der $L^\infty$-Norm von H und der Elliptizitätskonstanten $\lambda$ des Differentialoperators, im Falle von (2.2) $\lambda=1$, notwendig, um die Hölderstetigkeit von x zu garantieren.

Optimale Ergebnisse sind hier erst in den letzten Jahren erzielt worden, von denen besonders die schon in der Einleitung zitierten Arbeiten von Hildebrandt-Widman, Wiegner, Giaquinta-Giusti sowie Frehse zu erwähnen sind.

Die spezielle Struktur des Systems (2.1) erlaubt nun wesentlich stärkere Aussagen.

Unter der Voraussetzung, daß H konstant ist, wurde die Regularität schwacher Lösungen zunächst von Wente [25],[26] gezeigt. Tomi bewies dann in [23], daß beschränkte schwache Lösungen regulär sind, falls man die Lipschitzstetigkeit von H voraussetzt.

Heinz [13] konnte unter einer zusätzlichen Bedingung an $\nabla H$, siehe (2.5), die partielle Regularität schwacher Lösungen nachweisen.

Bei allen diesen Regularitätsbeweisen ist die isoperimetrische Ungleichung bzw. eine Folgerung daraus von entscheidender Bedeutung.

Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst einen neuen Beweis für den Satz von Heinz geben, der eine Idee aus [08] von Giaquinta-Giusti benutzt, und der ohne einen Existenzbeweis auskommt und direkt die Hölderstetigkeit mit jedem Exponenten $\alpha \in ]0,1[$ zeigt.

Anschließend untersuchen wir die mögliche Singularitätenmenge genauer und zeigen, daß sie von verschwindender 2-Kapazität ist, was nach (1.4) (ii) PROPOSITION zur Folge hat, daß die Hausdorffdimension Null ist.

Im letzten Teil dieses Paragraphen beweisen wir dann, daß allein unter der Voraussetzung, daß H beschränkt ist, keine isolierten Singularitäten auftreten können. Dieses Resultat gilt auch für allgemeinere Systeme, vgl. [21],[11].

(2.3) THEOREM

Es sei $x \in H_2^1(\Omega,\mathbf{R}^3)$, $\Omega$ ein Gebiet des $\mathbf{R}^2$, schwache Lösung von (2.1).

Für die Funktion $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gelte

(2.4) $$\|H\|_{L^\infty} =: h_o < \infty ,$$

(2.5) $$\operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|)|\nabla H(y)| =: h_1 < \infty .$$

Dann gilt:

Es gibt $\Omega_o \subset \Omega$, $\Omega_o$ offen und dicht in $\Omega$, $L^2(\Omega\setminus\Omega_o)=0$, so daß $x \in C^{0,\alpha}(\Omega_o,\mathbb{R}^3)$ für jedes $\alpha \in ]0,1[$.
$w_o \in \Omega$ gehört genau dann zu $\Omega_o$, wenn es eine Folge $\{R_k\}$ gibt mit $R_k \to 0$, $R_k < \operatorname{dist}(w_o,\partial\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und

(2.6) $$\lim_{k\to\infty} D_{B_k}(x) \left( \fint_{B_k} |x| \right)^2 = 0 ,$$

wobei $B_k := B_{R_k}(w_o)$ .

Beweis:
Es sei $w_o \in \Omega$ und $\{R_k\}$ so gewählt, daß (2.6) gilt.
Wir wählen $R < d := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(w_o,\partial\Omega)$ beliebig.
Sei w irgendein Punkt in $B_d(w_o)$; von jetzt ab mögen alle auftretenden Kugeln den Mittelpunkt w haben.
Nach (1.11) PROPOSITION gibt es $r \in [\frac{1}{2}R,R]$ mit

(2.7) $$\|x\|_{L^\infty(\partial B_r)} \le K_1 \left( D_{B_R}(x) + \fint_{B_R} |x|^2 \right)^{1/2} .$$

Wir müssen beachten, daß r von w abhängen kann.
Es sei y die harmonische Funktion auf $B_r$ mit denselben Randwerten wie x. Nach (1.10) PROPOSITION gilt dann für $\rho \le r$

(2.8) $$D_{B_\rho}(y) \le \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 D_{B_r}(y) .$$

Wir betrachten nun eine Folge $\{\phi_m\}$ von Funktionen $\phi_m \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \phi_m(t) &= t && \text{für } |t|\le m \\ |\phi_m(t)| &\le m+1 && \text{für } t \in \mathbb{R} \\ |\phi_m'(t)| &\le 1 && \text{für } t \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Mit $z:=x-y$ gilt: $z \in \overset{\circ}{H}{}_2^1(B_r)$; setzen wir nun für $i=1,2,3$

$$\xi_m^i := \phi_m \circ z^i\ ,$$

so gilt: $\xi_m \in \overset{\circ}{H}{}_2^1(B_r)\cap L^\infty$, woraus wegen (2.4) und (2.5) Hox $\xi_m \in \overset{\circ}{H}{}_2^1(B_r)\cap L^\infty$ folgt. Wir halten fest:

$$|\xi_m|\le|z| \text{ und } |\nabla\xi_m|\le|\nabla z|.$$

Außerdem gilt für fast alle $w' \in B_r$

$$\lim_{m\to\infty} \nabla\xi_m(w') = \nabla z(w').$$

Wir müssen zunächst $\xi_m$ statt z betrachten, weil nur beschränkte Testfunktionen zugelassen sind.

Ausnutzen von $\Delta y=0$ und Einsetzen von $\xi_m$ als Testfunktion in (1.2) liefert

$$\int_{B_r} \nabla z\cdot\nabla\xi_m = -2 \int_{B_r} H(x)\ \xi_m\cdot(x_u\wedge x_v)\ .$$

Die rechte Seite schätzen wir mit Hilfe der isoperimetrischen Ungleichung (1.9) ab

$$\left|2 \int_{B_r} (H(x)\xi_m)\cdot(x_u\wedge x_v)\ \right| \le$$

$$\le K_2\Big[\ \int_{B_r} |\nabla(H(x)\xi_m)|^2\ \Big]^{1/2} D_{B_r}(x).$$

Den ersten Faktor verarbeiten wir folgendermaßen

$$\Big[ \int_{B_r} |\nabla(H(x)\xi_m)|^2 \Big]^{1/2} \le$$

$$\le \Big[ \int_{B_r} |H(x)|^2 |\nabla\xi_m|^2 \Big]^{1/2} + \Big[ \int_{B_r} |\nabla H(x)|^2 |\xi_m|^2 |\nabla x|^2 \Big]^{1/2}$$

$$\le h_o D_{B_r}(z)^{1/2} + \Big[ \int_{B_r} |\nabla H(x)|^2 |x|^2 |\nabla x|^2 \Big]^{1/2} +$$

$$+ \Big[ \int_{B_r} |\nabla H(x)|^2 |y|^2 |\nabla x|^2 \Big]^{1/2} \le$$

$$\le \Big\{ h_o + h_1 (1 + \|y\|_{L^\infty(B_r)}) \Big\} D_{B_r}(x)^{1/2}.$$

Da $|y|^2$ subharmonisch ist, gilt das Maximumprinzip, und wir erhalten mit (2.7)

$$\Big[ \int_{B_r} |\nabla(H(x)\xi_m)|^2 \Big]^{1/2} \le$$

$$\le K_3 \Big\{ h_o + h_1 \Big( 1 + D_{B_R}(x)^{1/2} + \Big( \fint_{B_R} |x|^2 \Big)^{1/2} \Big) \Big\} D_{B_r}(x)^{1/2}.$$

Sei nun $\alpha \in ]0,1[$ gewählt und $p = \frac{2}{\alpha}$ ; dann

$$\Big( \fint_{B_R} |x|^2 \Big)^{1/2} \le \Big( \fint_{B_R} |x|^p \Big)^{1/p}.$$

Berücksichtigen wir noch die Monotonie des Dirichletintegrals, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\Big[ \int_{B_r} |\nabla(H(x)\xi_m)|^2 \Big]^{1/2} \le K_4 \, \chi_p(w,R), \text{ wo}$$

$$\chi_p(w,R) := \Big\{ h_o + h_1 \Big( 1 + D_{B_R}(x)^{1/2} + \Big( \fint_{B_R} |x|^p \Big)^{1/p} \Big) \Big\} D_{B_R}(x)^{1/2}.$$

Es gilt also

$$\Big| \int_{B_r} \nabla z \cdot \nabla \xi_m \Big| \le K_5 \, D_{B_R}(x) \, \chi_p(w,R).$$

Lassen wir m über alle Grenzen wachsen, so liefert der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz ($\frac{1}{2}R\leq r$)

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla z|^2 \leq K_5\, D_{B_R}(x)\ \chi_p(w,R)\ .$$

Das impliziert für $\rho \in ]0,\frac{1}{2}R[$ (wegen (2.8) )

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |\nabla x|^2 &\leq 2\int_{B_\rho} |\nabla y|^2 + 2\int_{B_\rho} |\nabla z|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \int_{B_r} |\nabla y|^2 + 2\int_{B_{R/2}} |\nabla z|^2 \leq \\ &\leq 8\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 D_{B_R}(x) + 2K_5\, D_{B_R}(x)\ \chi_p(w,R) \leq \\ &\leq K_6\, D_{B_R}(x)\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + \chi_p(w,R)\right].\end{aligned}$$

Verwenden wir die Schreibweise $\Phi(w,R) := D_{B_R}(x)$ und setzen $\rho=\tau R$ , $\tau \in ]0,\frac{1}{2}[$, so erhalten wir für $w \in B_d(w_o)$ und $R<d$

$$\Phi(w,\tau R) \leq K_6\tau^2\, \Phi(w,R)[1+\chi_p(w,R)\tau^{-2}]. \tag{2.9}$$

Sei nun $\tau=\tau(\alpha)$ so klein gewählt, daß

$$2K_6\tau^{2(1-\alpha)} \leq 1\ .$$

Die Funktion $\chi_p$ können wir wie folgt abschätzen

$$\chi_p(w,R) \leq \{h_o+h_1(1+C(p)\Phi(w,R)^{1/2}+C(p)\fint_{B_R}|x|)\}\Phi(w,R)^{1/2}$$

wobei wir die Sobolev-Ungleichung (1.6) (i),(ii) verwendet haben.

Aus der Wahl von $w_o$ und der Folge $\{R_k\}$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \chi_p(w_o,R_k) = 0.$$

Also gibt es eine natürliche Zahl k, so daß ($R=R_k$ ab jetzt fixiert)

$$\chi_p(w_o,R) < \tau^2 . \tag{2.10}$$

Aus (2.9) folgt somit

$$\Phi(w_o,\tau R) \le \tau^{2\alpha}\, \Phi(w_o,R). \tag{2.11}$$

Weil $\chi_p(\cdot,R)$ eine stetige Funktion ist, impliziert (2.10), daß es $d_o>0$ gibt mit

$$\chi_p(w,R) < \tau^2 \tag{2.10'}$$

für jedes $w \in B_{d_o}(w_o)$, so daß (2.11) auch für all diese w anstelle von $w_o$ gilt.

Aus (2.10) und (2.11) zusammen erhalten wir für $w \in B_{d_o}(w_o)$

$$\chi_p(w,\tau R)=\left\{h_o+h_1\left(1+\Phi(w,\tau R)^{1/2}+\left(\fint_{B_{\tau R}}|x|^p\right)^{1/p}\right)\right\}\Phi(w,\tau R)^{1/2}$$

$$\le\left\{h_o+h_1\left(1+\Phi(w,R)^{1/2}+\tau^{-2/p}\left(\fint_{B_R}|x|^p\right)^{1/p}\right)\right\}\tau^{\alpha}\Phi(w,R)^{1/2}$$

$$\le \chi_p(w,R) < \tau^2.$$

Wir sehen daher, daß (2.10') auch für $\tau R$ gilt, wenn für R gültig. Da (2.9) für $\tau^l R$ richtig ist, $l \in \mathbb{N}$ beliebig, erhalten wir wie in (2.11)

$$\Phi(w,\tau^l R) \le \tau^{2\alpha l}\, \Phi(w,R)$$

für jede natürliche Zahl l und jeden Punkt $w \in B_{d_o}(w_o)$.

Daraus folgt, daß für $\rho \in ]0,\tau R[$ gilt

(2.12) $$\Phi(w,\rho) \leq \tau^{-2\alpha} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\alpha} \Phi(w,R).$$

Aus dem Dirichlet-Growth-Theorem (1.7) erhalten wir nun die Hölderstetigkeit von x auf $B_{d_o}(w_o)$ mit dem Exponenten $\alpha$. Also gilt (2.6) auch auf $B_{d_o}(w_o)$. Wir erhalten also, daß die Menge $\Omega_o$ aus der Behauptung offen ist; daß sie auch dicht liegt in $\Omega$, folgt aus dem bekannten Satz der Integrationstheorie, daß die Menge der Punkte, die keine Lebesguepunkte sind, das Maß Null hat, so daß die Bedingung (2.6) von fast allen Punkten in $\Omega$ erfüllt wird.

Bevor wir die Struktur der möglichen Singularitätenmenge $\Omega \backslash \Omega_o$ genauer untersuchen, halten wir das folgende Theorem fest, das eine leichte Folgerung aus (2.3) THEOREM ist.

(2.13) THEOREM

Die Voraussetzungen seien die von (2.3) THEOREM.

Dann gilt: $x \in C^{2,\alpha}(\Omega_o, \mathbb{R}^3)$ für jedes $\alpha \in ]0,1[$.

Beweis:

Sei $w_o \in \Omega_o$. Aus der Stetigkeit von x im Punkte $w_o$ folgt, daß die Voraussetzungen des Satzes (1.8) von Tomi auf einer Umgebung von $w_o$ erfüllt sind. Also können wir $x \in C^{1,\alpha}(\Omega_o, \mathbb{R}^3)$ schließen. Nun ist aber die rechte Seite der Gleichung (2.1) hölderstetig mit jedem Exponenten $\alpha \in ]0,1[$, weil H ja lipschitzstetig ist. Aus fundamentalen Sätzen der Potentialtheorie folgt dann die Behauptung.

Im nächsten Theorem zeigen wir, daß nicht nur $\mathbb{L}^2(\Omega\backslash\Omega_o)=0$ gilt, sondern daß die Menge der Punkte, die (2.6) nicht genügen, von der Kapazität Null ist.

(2.14) THEOREM

Sei $f \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R})$, $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$, $f \geq 0$ und

$$E:=\{ w \in \Omega: \liminf_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(w)} f = \infty \}.$$

Dann gilt:

(i) $c_2^R(E) = 0$ ,

(ii) $\mathbb{H}$-dim $(E) = 0$ .

Beweis:

(i)

Zu $m \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_m := \{w \in \Omega: \operatorname{dist}(w,\partial\Omega) \geq \frac{1}{m}\}$.

Sei $E'$ eine kompakte Teilmenge von $E$ und $E'_m := E' \cap \Omega_m$.

Wir zeigen für jedes $m$ : $c_2^R(E'_m) = 0$.

Daraus folgt dann

$$c_2^R(E) = \sup\{ c_2^R(E') : E' \subset E \text{ kompakt } \} \leq$$

$$\leq \sup\{ \sum_{m=1}^{\infty} c_2^R(E'_m) : E' \subset E \text{ kompakt } \} = 0,$$

da $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ .

Wir betrachten zunächst $\eta \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften

$\eta(w) = 1$ für $w \in \Omega_{m+1}$,

$\eta(w) = 0$ für $w \in \Omega\backslash\Omega_{m+2}$,

$\eta(w) \in [0,1]$ sonst .

Wir setzen $g=f\eta$, so daß

$$g \in H^1_{2,c}(\Omega,\mathbb{R}) \text{ und } g\equiv f \text{ auf } \Omega_{m+1} \supset \Omega_m \supset E'_m .$$

Für k groß genug sei $g_k(w) := \fint_{B^k(w)} g$ , $w \in \Omega$ und $B^k(w)=B_{\frac{1}{k}}(w)$.

Wir halten folgende Eigenschaften der $g_k$ fest:

(1) $\quad g_k \in C^0_c(\Omega,\mathbb{R})$ ,

(2) $\quad g_k \geq 0$ ,

(3) $\quad g_k \in H^1_{2,c}(\Omega,\mathbb{R})$ ,

(4) $\quad \nabla g_k(w) = \fint_{B^k(w)} \nabla g$ ,

(5) $\quad g_k \longrightarrow g$ in $H^1_2$ bei $k\to\infty$ .

Um (3) und (4) nachzuweisen, genügt es $g \in C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R})$ anzunehmen. Dann kann man die Integrale nach w differenzieren und eine Abschätzung der Form

$$\|\nabla g_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathbb{L}^2(\Omega)\ C(k)\ \|\nabla g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

herleiten, so daß (3) und (4) auch für $g \in H^1_{2,c}(\Omega,\mathbb{R})$ gelten. (5) folgt dann leicht aus (3) und (4).
Weil also die $g_k$ als Testfunktionen für die Kapazität zulässig sind, gilt für $s>0$

(2.15) $\quad c_2^R\{\, w \in \Omega:\ |g_k(w)-g_l(w)| \geq s \,\} \leq$

$$\leq s^{-2} \int_\Omega |\nabla g_k - \nabla g_l|^2 .$$

Da $\nabla g_k \longrightarrow \nabla g$ in $L^2(\Omega)$, gibt es eine Teilfolge, die wieder mit $g_k$ bezeichnet sei, so daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \|\nabla g_{k+1} - \nabla g_k\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty .$$

Aus (2.15) erhalten wir mit $s=2^{-k}$ und

$$F_k := \{ w \in \Omega: |g_{k+1}(w)-g_k(w)| \geq 2^{-k} \}:$$

$$c_2^R(F_k) \leq \|\nabla g_{k+1}-\nabla g_k\|^2_{L^2(\Omega)} \, 4^k .$$

Setzen wir $W_j := \bigcup_{k=j}^{\infty} F_k$ , so gilt $W_{j+1} \subset W_j$ und

$$c_2^R(W_j) \leq \sum_{k=j}^{\infty} c_2^R(F_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 4^k \|\nabla g_{k+1}-\nabla g_k\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Also haben wir $\lim_{j\to\infty} c_2^R(W_j) = 0$ .

Auf $\Omega\backslash W_j$ gilt nun für jedes $k\geq j$

$$| g_{k+1} - g_k | < 2^{-k} ,$$

so daß wir schließen können, daß die Folge der $g_k$ auf $\Omega\backslash W_j$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\tilde{g}$ konvergiert. Das heißt insbesondere, daß für $w \in \Omega\backslash W_j$

$$\lim_{k\to\infty} g_k(w) = \lim_{k\to\infty} \fint_{B^k(w)} g < \infty \text{ ist.}$$

Ist nun $w \in E'_m$ , so gilt für genügend großes k

$$\fint_{B^k(w)} g = \fint_{B^k(w)} f ;$$

deshalb kann w nicht zu $\Omega\backslash W_j$ gehören.

Also $E'_m \subset W_j$ für jedes j, so daß

$$c_2^R(E'_m) \leq \lim_{j\to\infty} c_2^R(W_j) = 0 .$$

Damit ist (i) bewiesen.

(ii)

Die Behauptung folgt sofort aus (1.4) (ii) LEMMA.

Bemerkungen:

(i)

Die Beschränktheit von $\Omega$ muß vorausgesetzt werden, da die n-Kapazität nur für beschränkte Mengen des $\mathbb{R}^n$ ein sinnvoller Begriff ist.

(ii)

Für den Beweis von (2.14) THEOREM vergleiche Lewy - Stampacchia [17], wo u.a. gezeigt wird, daß $H_2^1$-Funktionen bis auf eine Menge der Kapazität Null punktweise erklärt werden können. Teil (ii) folgt auch aus [06],[10].

(iii)

Die Anwendung von (2.14) THEOREM auf unser Problem ist offensichtlich. Man setzt $f:=|x|$ und beachtet : $\Omega\backslash\Omega_o \subset E$.

Im letzten Teil dieses Paragraphen wollen wir zeigen, daß schwache Lösungen des Systems (2.1) keine isolierten Singularitäten haben können. Es gilt nämlich der folgende Satz.

(2.15) THEOREM

Es sei $w_o \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$.

Es sei $x \in C^2(B_R(w_o)\backslash\{w_o\},\mathbb{R}^3) \cap H_2^1(B_R(w_o))$ schwache Lösung des Systems (2.1) und $H \in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

Dann gilt:

$x$ läßt sich so auf $B_R(w_o)$ fortsetzen, daß $x \in C^{1,\alpha}(B_R(w_o),\mathbb{R}^3)$ für jedes $\alpha \in ]0,1[$.

Ist H außerdem hölderstetig mit dem Exponenten $\beta$, so sind die zweiten Ableitungen von x ebenfalls hölderstetig mit dem Exponenten $\beta$.

Dem Beweis von (2.15) schicken wir eine Reihe von Lemmas voraus. Wir beweisen zunächst eine fundamentale Ungleichung, die aus der Kleinheit des Dirichletintegrals gewonnen wird.

(2.16) LEMMA

Für alle $H \in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ mit $\|H\|_{L^\infty} \le h_o$, $p \ge 1$ und $0<\rho<\sigma\le 1$ gibt es $K=K(\rho,\sigma,p,h_o)>0$, so daß für jede Lösung $x \in C^2(\bar{B}_1,\mathbb{R}^3)\cap H_2^1$ des Systems (2.1) gilt

(alle auftretenden Kugeln mögen 0 als Mittelpunkt haben)

$$\|\nabla x\|_{H_p^1(B_\rho)} \le K[1+\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}]^3 \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}.$$

Beweis:

Wir leiten zunächst eine etwas kompliziertere Ungleichung her, die wir aber auch im nächsten Lemma verwenden können. Es seien $0<\tau_1<\tau_2\le 1$, $\phi \in C_c^\infty(B_{\tau_2})$, $0\le\phi\le 1$ und $\phi\equiv 1$ auf $B_{\tau_1}$. Wegen (2.1) gilt auf $B_1$

$$|\Delta(\phi x)| \le 2h_o|\nabla(\phi x)||\nabla x| + 2h_o|\nabla\phi\|_{L^\infty}|x||\nabla x| + \|\Delta\phi\|_{L^\infty}|x| + 2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}|\nabla x|.$$

Mit einer Konstanten $K_1=K_1(\tau_2-\tau_1)$ erhalten wir für $r\ge 1$

$$\|\Delta(\phi x)\|_{L^r(B_{\tau_2})} \le 2h_o\|\nabla(\phi x)\|\nabla x|\|_{L^r(B_{\tau_2})} + 2h_oK_1\|x\|\nabla x|\|_{L^r(B_{\tau_2})} + K_1\|x\|_{H_r^1(B_{\tau_2})}.$$

Weil $\phi x \in C_c^2(B_{\tau_2})$, gibt es $C(r)>0$, so daß

$$\|\phi x\|_{H_r^2(B_{\tau_2})} \le C(r)\|\Delta(\phi x)\|_{L^r(B_{\tau_2})}.$$

Vgl. Morrey [19], Theorem 3.4.2.b). Also gilt

$$
*\binom{r}{\tau_1}_{\tau_2}
\qquad
\begin{aligned}
\|\phi x\|_{H^2_r(B_{\tau_2})} \le 2h_o C(r) \big\| |\nabla(\phi x)|\,|\nabla x| \big\|_{L^r(B_{\tau_2})} + \\
+ 2h_o C(r) K_1 \big\| |x|\,|\nabla x| \big\|_{L^r(B_{\tau_2})} + C(r) K_1 \|x\|_{H^1_r(B_{\tau_2})}.
\end{aligned}
$$

Sei nun zunächst $\tau_2=\sigma$, $\tau_1=(\rho+\sigma)/2$ und $r=2$. Statt $x$ betrachten wir $\bar{x}=x-\fint_{B_\sigma} x$ und beachten, daß * auch für $\bar{x}$ gilt.

Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir aus * ($\nabla x=\nabla\bar{x}$)

$$
\begin{aligned}
\|\phi\bar{x}\|_{H^2_2(B_\sigma)} \le 2h_o C(2) \|\nabla(\phi\bar{x})\|_{L^4(B_\sigma)} \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)} + \\
+ 2h_o C(2) K_1 \|\bar{x}\|_{L^4(B_\sigma)} \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)} + C(2) K_1 \|\bar{x}\|_{H^1_2(B_\sigma)}.
\end{aligned}
$$

Aus der Poincaré-Ungleichung (1.5) (i) erhalten wir

$$
\|\bar{x}\|_{H^1_2(B_\sigma)} \le K(\sigma) \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)},
$$

$$
\|\bar{x}\|_{L^4(B_\sigma)} \le K'(\sigma) \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}.
$$

Benutzen wir, daß $\phi\equiv 1$ auf $B_{(\rho+\sigma)/2}$, so erhalten wir mit einer neuen Konstanten $K_2=K_2(\sigma,\sigma-\rho,h_o)$

$$
\text{(2.17)} \qquad
\begin{aligned}
\|\nabla x\|_{H^1_2(B_{(\rho+\sigma)/2})} \le \|\bar{x}\|_{H^2_2(B_{(\rho+\sigma)/2})} \le \\
\le K_2 (1+\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}) \|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\hat{x}=x-\fint_{B_{(\rho+\sigma)/2}} x$. Dann liefern die Ungleichungen von Poincaré und Sobolev, (1.5) und (1.6), ($\nabla x=\nabla\hat{x}$)

$$
\|\hat{x}\|_{H^1_{2p}(B_{(\rho+\sigma)/2})} \le K''(p,\rho+\sigma) \|\nabla x\|_{H^1_2(B_{(\rho+\sigma)/2})} \le
$$

$$\leq K''K_2(1+\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)})\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}.$$

Wir verwenden jetzt erneut * mit $\hat{x}$, $r=p$, $\tau_1=\rho$, $\tau_2=(\rho+\sigma)/2$.

$$\begin{aligned}
\|\phi\hat{x}\|^2_{H^2_p(B_{(\rho+\sigma)/2})} &\leq 2h_o C(p)\|\nabla(\phi\hat{x})\|_{L^{2p}}\|\nabla x\|_{L^{2p}} + \\
&+2h_o C(p)K_1\|\hat{x}\|_{L^{2p}}\|\nabla x\|_{L^{2p}} + \\
&+C(p)K_1\|\hat{x}\|_{H^1_p} \leq \\
&\leq 4h_o C(p)K_1\|\hat{x}\|^2_{H^1_{2p}(B_{(\rho+\sigma)/2})} + \\
&+C(p)K_1K_3(p,\rho+\sigma)\|\hat{x}\|_{H^1_{2p}(B_{(\rho+\sigma)/2})} \leq \\
&\leq K[1+\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}]^3\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)},
\end{aligned}$$

wobei K wie in der Behauptung ist.

Da $\phi\equiv 1$ auf $B_\rho$, folgt wie behauptet

$$\|\nabla x\|_{H^1_p(B_\rho)} \leq K[1+\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}]^3\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}.$$

Das nächste Lemma bringt die angekündigte fundamentale Ungleichung.

(2.18) LEMMA

Für alle $H \in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ mit $\|H\|_{L^\infty}\leq h_o$ gibt es $\varepsilon=\varepsilon(h_o)>0$, so daß für alle Lösungen $x \in C^2(\bar{B}_1,\mathbb{R}^3)\cap H^1_2$ des Systems (2.1) mit $\int_{B_1}|\nabla x|^2 < \varepsilon$ gilt:

Zu jedem $p\geq 1$ und $0<\rho<1$ gibt es $K=K(\rho,p,\varepsilon)>0$, so daß

$$\|\nabla x\|_{H^1_p(B_\rho)} \leq K\|\nabla x\|_{L^2(B_1)}.$$

Beweis:

Wegen (2.16) LEMMA genügt es, für $\sigma \in ]\rho,1[$ $\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)}$ gegen $\|\nabla x\|_{L^2(B_1)}$ abzuschätzen.

Sei $\sigma=\frac{1}{2}(\rho+1)$. Wir verwenden * mit $r=\frac{4}{3}$, $\tau_1=\sigma$, $\tau_2=1$.

Da wir annehmen können $\int_{B_1} x = 0$, liefern die Ungleichungen von Poincaré und Sobolev, (1.5) und (1.6),

$$\| |\nabla(\phi x)| |\nabla x| \|_{L^r(B_1)} \leq \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} \|\nabla(\phi x)\|_{L^4(B_1)} \leq$$

$$\leq C \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} \|\phi x\|_{H^2_r(B_1)} ,$$

$$\|x\|_{H^1_r(B_1)} \leq C \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} ,$$

$$\| |x| |\nabla x| \|_{L^r(B_1)} \leq \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} \|x\|_{L^4(B_1)} \leq$$

$$\leq C \|\nabla x\|^2_{L^2(B_1)} .$$

Also erhalten wir aus * :

$$(1-2h_o C(\tfrac{4}{3}) C \|\nabla x\|_{L^2(B_1)}) \|\phi x\|_{H^2_{4/3}(B_1)} \leq$$

$$\leq (K_1 C(\tfrac{4}{3}) C + 2h_o C(\tfrac{4}{3}) C K_1 \sqrt{\varepsilon}) \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} .$$

Falls also $\varepsilon < [2h_o C(\frac{4}{3}) C]^{-2}$, so folgt mit (1.6), da $\phi \equiv 1$ auf $B_\sigma$:

$$\|\nabla x\|_{L^4(B_\sigma)} \leq C \|\phi x\|_{H^2_{4/3}(B_1)} \leq K(h_o, \varepsilon) \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} .$$

Nach (2.16) LEMMA folgt dann die Behauptung

$$\|\nabla x\|_{H^1_p(B_\rho)} \leq K \|\nabla x\|_{L^2(B_1)} .$$

Das nächste Lemma zeigt, daß eine Lösung des Systems (2.1) zwar nicht konform parametrisiert sein muß, aber doch eine erstaunliche Eigenschaft besitzt.

(2.19) LEMMA

Es sei $x \in C^2(B_2\backslash\{0\})$ Lösung von (2.1) auf $B_2\backslash\{0\}$.

Ist $f(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) := |x_v|^2 - |x_u|^2 + 2ix_u \cdot x_v$ ,

so ist f holomorph auf $B_2\backslash\{0\}$.

Beweis:

Da f reell differenzierbar ist, genügt es, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nachzurechnen. Beachtet man die Gleichung (2.1), so bereitet das keine Mühe und (2.19) LEMMA ist damit bewiesen.

Nun leiten wir aus der in (2.18) LEMMA gewonnenen Ungleichung eine punktweise Abschätzung des Gradienten her, die außerhalb der Singularität gilt.

(2.20) LEMMA

Es sei $x \in C^2(B_2\backslash\{0\}) \cap H_2^1(B_2)$ schwache Lösung von (2.1) und

$$\int_{B_2} |\nabla x|^2 < \varepsilon \ .$$

Dann gibt es eine positive Konstante $C=C(K)>0$, so daß für jeden Punkt $w_o \in B_1\backslash\{0\}$ gilt

$$|\nabla x(w_o)| \leq C \left[ \fint_{B_{2|w_o|}} |\nabla x|^2 \right]^{1/2} .$$

Bemerkung:

$\varepsilon$,K sind die Konstanten aus (2.18) LEMMA mit $\rho=\frac{1}{2}$, $p=4$.

Beweis:

Es sei $w_o \in B_1 \setminus \{0\}$ und für $w \in B_1$ sei

$$\tilde{x}(w) := x(w_o + w(|w_o|/2)) \ .$$

Dann gilt: $\tilde{x} \in C^2(\bar{B}_1) \cap H_2^1$ und $\tilde{x}$ ist Lösung von (2.1) auf $B_1$. Für das Dirichletintegral gilt

$$\int_{B_1} |\nabla \tilde{x}|^2 = \int_{B_{|w_o|/2}(w_o)} |\nabla x|^2 \leq \int_{B_2} |\nabla x|^2 < \varepsilon .$$

Die Voraussetzungen von (2.18) LEMMA sind also erfüllt, und zusammen mit der Sobolev-Ungleichung (1.6)(iii) erhalten wir

$$|\nabla \tilde{x}(0)| \leq \sup_{w \in B_{1/2}} |\nabla \tilde{x}(w)| \leq C \, \|\nabla \tilde{x}\|_{H_4^1(B_{1/2})} \leq$$

$$\leq CK \, \|\nabla \tilde{x}\|_{L^2(B_1)} .$$

Aus der Definition von $\tilde{x}$ ergibt sich nun sofort die Behauptung.

Mit (2.20) LEMMA können wir jetzt die Aussage von (2.19) LEMMA verbessern.

(2.21) LEMMA

Es mögen die Voraussetzungen von (2.20) LEMMA gelten. Ist f die in (2.19) LEMMA definierte Funktion, so ist F mit

$$F(z) := zf(z) \qquad \text{holomorph auf } B_2 .$$

Beweis:

Es genügt nachzuweisen: $\lim_{z \to 0} zF(z) = 0$ .

Es gilt für $z \neq 0$ : $|f(z)| \leq 2 \, |\nabla x(u,v)|^2$,

und (2.20) LEMMA liefert dann für $z \in B_1 \setminus \{0\}$

$$|zF(z)| = |z^2 f(z)| \leq 2|\nabla x(u,v)|^2 |z|^2 \leq$$
$$\leq 2C^2 \int_{B_{2|z|}} |\nabla x|^2 .$$

Aus der Absolutstetigkeit des Integrals folgt dann die zu beweisende Behauptung.

Mit (2.21) LEMMA beweisen wir jetzt noch eine Beziehung, die es uns gestatten wird, im Beweis unseres Theorems zwei Dirichletintegrale gegeneinander abzuschätzen.

(2.22) LEMMA

Es mögen die Voraussetzungen von (2.20) LEMMA gelten. Dann hat man für $r \in ]0,2[$

$$\int_0^{2\pi} |x_\theta|^2 (re^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} r^2 |x_r|^2 (re^{i\theta})\, d\theta .$$

Beweis:

Sei f wie in (2.19) LEMMA und $r \in ]0,2[$. Dann gilt für $|z|=r$

$$\mathrm{Re}[z^2 f(z)] = |x_\theta|^2 - r^2 |x_r|^2 .$$

Nach (2.21) LEMMA und dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{|z|=r} zf(z)\, dz = 0.$$

Daraus aber folgt leicht die behauptete Gleichheit

$$0 = \mathrm{Im}\left[\int_{|z|=r} zf(z)dz\right] = \mathrm{Im}\left[i \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})(re^{i\theta})^2 d\theta\right] =$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}[f(re^{i\theta})(re^{i\theta})^2]d\theta = \int_0^{2\pi} [|x_\theta|^2 - r^2|x_r|^2]d\theta .$$

Wir kommen jetzt zum Beweis von (2.15) THEOREM.

Beweis:

Wegen der Invarianz des Dirichletintegrals unter konformen Abbildungen können wir annehmen

$$R=2\ ,\ w_o=0\ ,\ \int_{B_2} |\nabla x|^2 < \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon=\varepsilon(h_o)$ die Konstante aus (2.18) LEMMA ist.

Statt x betrachten wir zunächst eine rotationssymmetrische Funktion q auf $B_1\setminus\{0\}$.

Dazu definieren wir für $m \in \mathbb{N}_o$

$$\mu_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(2^{-m}\cos\theta\ ,2^{-m}\sin\theta\ )\ d\theta\ ,$$

d. h. wir betrachten Mittelwerte von x auf konzentrischen Kreisen um den Ursprung.

Für $w \in B_1\setminus\{0\}$ mit $2^{-m}\le|w|\le 2^{-m+1}$ definieren wir

$$q(w) := q(|w|) = \alpha_m \log|w| + \beta_m$$

mit $\alpha_m=(\mu_{m-1}-\mu_m)/\log 2$ und $\beta_m=m(\mu_{m-1}-\mu_m)+\mu_m$ .

Dann ist q harmonisch für $2^{-m}\le|w|\le 2^{-m+1}$ und hat dort die Randwerte $\mu_m$ und $\mu_{m-1}$. q ist stetig auf $\bar{B}_1\setminus\{0\}$.

Sei w ein Punkt mit $2^{-m}<|w|\le 2^{-m+1}$.

$$|q(|w|)-x(w)|\le|q(|w|)-q(2^{-m+1})|+|q(2^{-m+1})-x(w)|\le$$
$$\le|q(2^{-m})-q(2^{-m+1})|+|q(2^{-m+1})-x(w)|$$

( explizite Formel für q oder Maximumprinzip ).

Für den zweiten Summanden erhalten wir

$$|x(w)-q(2^{-m+1})|\le \max_{2^{-m}\le|w'|,|w''|\le 2^{-m+1}} |x(w')-x(w'')|\le$$

$$\leq 2^{-m} 2\pi \max_{2^{-m} \leq |w'| \leq 2^{-m+1}} |\nabla x(w')| \leq$$

$$\leq 2\pi \max \ldots |\nabla x(w')| |w'| \leq 2\pi C\sqrt{\varepsilon} ,$$

wobei wir (2.20) LEMMA verwendet haben.

Die gleiche Abschätzung läßt sich für den ersten Summanden durchführen. So erhalten wir

$$(2.23) \qquad \sup_{w \in \bar{B}_1 \setminus \{0\}} |q(w)-x(w)| \leq 4\pi C\sqrt{\varepsilon}.$$

Mit $A_m$ bezeichnen wir den Ring $A_m := B_{2^{1-m}} \setminus \bar{B}_{2^{-m}}$.

Da $q,x \in C^2(\bar{A}_m)$, liefert die erste Greensche Formel

$$\int_{A_m} |\nabla(q-x)|^2 = \oint_{\partial A_m} (q-x)\cdot\partial_\nu(q-x) - \int_{A_m} (q-x)\cdot\Delta(q-x)$$

($\nu$ ist die nach außen zeigende Einheitsnormale).

Für das Randintegral gilt

$$\oint_{\partial A_m} (q-x)\cdot\partial_\nu(q-x) =$$

$$= 2^{1-m} \int_0^{2\pi} (q(2^{1-m})-x(2^{1-m}e^{i\theta}))\cdot(q'(2^{1-m})-x_r(2^{1-m}e^{i\theta}))d\theta$$

$$-2^{-m} \int_0^{2\pi} (q(2^{-m})-x(2^{-m}e^{i\theta}))\cdot(q'(2^{-m})-x_r(2^{-m}e^{i\theta}))d\theta.$$

Wegen der speziellen Wahl von q verschwinden die Integrale mit q', so daß wir erhalten

$$\int_{B\setminus B_m} |\nabla(q-x)|^2 = 2^{-m} \int_0^{2\pi} (q(2^{-m})-x(2^{-m}e^{i\theta}))\cdot x_r(2^{-m}e^{i\theta})d\theta -$$

$$-\int_0^{2\pi}(q(1)-x(e^{i\theta}))\cdot x_r(e^{i\theta})d\theta+\int_{B\setminus B_m}(q-x)\cdot\Delta x\ .$$

(Die anderen Randintegrale heben sich gegenseitig heraus, da alle auftretenden Funktionen stetig sind; es bleibt im letzten Integral nur $\Delta x$ übrig, weil q auf $A_m$ harmonisch ist.)

Aus (2.23) folgt zusammen mit (2.20) LEMMA

$$|2^{-m}\int_0^{2\pi}(q(2^{-m})-x(2^{-m}e^{i\theta}))\cdot x_r(2^{-m}e^{i\theta})d\theta| \le$$

$$\le 2\sqrt{\pi}C^2\sqrt{\varepsilon}\Big[\int_{B_{2^{1-m}}}|\nabla x|^2\Big]^{1/2}\ ,$$

so daß dieses Randintegral bei $m\to\infty$ verschwindet.

Für das Integral über $B\setminus B_m$ gilt

$$\int_{B\setminus B_m}|(q-x)\cdot\Delta x| \le 4\pi Ch_o\sqrt{\varepsilon}\int_{B_1}|\nabla x|^2\ .$$

Nach Durchführung des Grenzübergangs erhalten wir

$$\int_{B_1}|\nabla(q-x)|^2=\int_0^{2\pi}(x(e^{i\theta})-q(1))\cdot x_r(e^{i\theta})d\theta\ +$$

$$+\int_{B_1}(q-x)\cdot\Delta x\ .$$

Sei nun $\delta<\frac{1}{2}$ und $\varepsilon<(\delta/(4\pi Ch_o))^2$; dann folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{B_1}|\nabla(q-x)|^2 \le$$

$$\le\Big[\int_0^{2\pi}|x(e^{i\theta})-q(1)|^2d\theta\Big]^{1/2}\Big[\int_0^{2\pi}|x_r(e^{i\theta})|^2d\theta\Big]^{1/2}+$$

$$+ \delta \int_{B_1} |\nabla x|^2 \ .$$

Die linke Seite der Ungleichung können wir mit Hilfe von (2.22) LEMMA folgendermaßen nach unten gegen das Dirichletintegral von x abschätzen.

$$\int_{B_1} |\nabla(q-x)|^2 = \int_{B_1} |(q-x)_r|^2 + r^{-2}|x_\theta|^2 \geq$$

$$\geq \int_{B_1} r^{-2}|x_\theta|^2 = \frac{1}{2}\int_{B_1} r^{-2}|x_\theta|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 r \int_0^{2\pi} |x_r|^2 d\theta \, dr = \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla x|^2 \ .$$

Benutzen wir jetzt noch die Poincaré-Ungleichung (1.5), so erhalten wir

$$(\tfrac{1}{2}-\delta)\int_{B_1} |\nabla x|^2 \leq C\pi \left[\int_0^{2\pi} |x_\theta(e^{i\theta})|^2 d\theta\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_0^2 |x_r(e^{i\theta})|^2 d\theta\right]^{1/2} \leq C\pi \int_0^{2\pi} |\nabla x(e^{i\theta})|^2 d\theta .$$

Mit $\gamma := (\frac{1}{2}-\delta)/C\pi$ gilt also

$$\gamma \int_{B_1} |\nabla x|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\nabla x(e^{i\theta})|^2 d\theta \ .$$

Für $0<\rho\leq 1$ kann man alle Rechnungen auch mit $x(\rho w)$ durchführen, was dann die Ungleichung

$$\gamma \int_{B_\rho} |\nabla x|^2 \leq \rho^2 \int_0^{2\pi} |\nabla x(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

liefert.

Daraus aber folgt in bekannter Weise für $\rho \leq 1$

$$\int_{B_\rho} |\nabla x|^2 \leq \rho^\gamma \int_{B_1} |\nabla x|^2 .$$

Aus (2.20) LEMMA folgt für $|w| \leq \frac{1}{2}$

$$|\nabla x(w)|\,|w| \leq C|w|^{\gamma/2}\Big[\int_{B_1} |\nabla x|^2\Big]^{1/2} ,$$

so daß wir für $|w'| \leq \frac{1}{4}$ und $r \leq \frac{1}{4}$ erhalten

$$\int_{B_r(w')} |\nabla x(w)|^2 \leq C^2\varepsilon \int_{B_r(w')} |w|^{\gamma-2} =$$

$$= C^2 2\pi\varepsilon \int_0^r \rho^{\gamma-2}\rho \, d\rho = M r^\gamma$$

mit $M=(2C^2\pi\varepsilon)/\gamma$.

Daraus aber folgt mit dem Dirichlet-Growth-Theorem (1.7) die Hölderstetigkeit von x auf $B_{1/4}$ mit dem Exponenten $\gamma/2$. Nach (1.8) PROPOSITION und den schon erwähnten fundamentalen Resultaten aus der Potentialtheorie ergibt sich die Behauptung des Theorems.

§ 3

## Die Regularität von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung

In diesem Paragraphen wollen wir die Gleichung

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \tag{3.1}$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß (u,v) konforme Parameter sind, untersuchen.

Wir betrachten jetzt also schwache Lösungen von (3.1), über die wir zusätzlich voraussetzen

$$|x_u|^2 - |x_v|^2 = 0 = x_u \cdot x_v \text{ f.ü. in } \Omega. \tag{3.2}$$

Wie in der Einleitung erwähnt besitzt die Gleichung dann geometrische Bedeutung. Ist nämlich $x \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $x_u \wedge x_v \neq 0$, so ist

$$H(x)\, \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$$

der mittlere Krümmungsvektor im Punkte x.

Wir werden in diesem Paragraphen allein unter der Annahme, daß (3.2) gilt, der Flächeninhalt von x endlich ist (wegen (3.2) äquivalent zur Endlichkeit des Dirichletintegrals) und

$$H \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \tag{3.3}$$

zeigen, daß die ersten Ableitungen von x hölderstetig sind mit jedem Exponenten $\alpha < 1$.

Die Bedingung (3.3) besagt, daß die mittlere Krümmung der Fläche x beschränkt ist.

Bevor wir die Beweisidee geometrisch erläutern und zum Beweis des angekündigten Resultats kommen, benötigen wir zur

Vorbereitung zwei Sätze.

Wir werden dabei eine Eigenschaft von $H_2^1$-Funktionen ausnutzen, die wir in der folgenden Proposition in der von uns benötigten Form zusammenfassen.

(3.4) PROPOSITION (Federer [05], 4.5.9. Theorem (26))
Ist $x \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$, so besitzt x in fast allen Punkten $w \in \Omega$ ein approximatives Differential $\nabla x(w)$.

Bemerkung:
Wir erinnern an die Definition der approximativen Differenzierbarkeit (Federer [05], 3.2.16.).

(3.5) DEFINITION
x ist approximativ differenzierbar in $w_o$ und besitzt dort das approximative Differential $\nabla x(w_o)$, falls gilt:

es gibt $x_o \in \mathbb{R}^3$, so daß für jedes $\varepsilon>0$

$$\Theta^2\left[\mathbb{L}^2 \llcorner \Omega\setminus\{w: |x(w)-x_o-\nabla x(w_o)(w-w_o)| \le \varepsilon |w-w_o|\}, w_o\right]=0.$$

Hierbei ist $\Theta^2$ die zweidimensionale Dichte.

Die Menge der Punkte w, für die

$$|x(w)-x_o-\nabla x(w_o)(w-w_o)| > \varepsilon |w-w_o|$$

ist, hat also im Punkt $w_o$ die Dichte 0 für jedes $\varepsilon>0$.
Nach Federer [05], 4.5.9. Theorem (30) (VI) stimmen approximatives Differential und schwache Ableitung f.ü. überein.
Mit $S:=\{w \in \Omega:$ x ist nicht approximativ differenzierbar in w$\}$,

$Z:=\{w \in \Omega:$ w ist kein Lebesguepunkt von $\nabla x\}$,

$N:=\{w \in \Omega\setminus(S\cup Z): \nabla x(w)=0\}$,

$A:=\Omega\setminus(S\cup Z\cup N)$ gilt der folgende Satz.

(3.6) PROPOSITION

Ist $w^* \in A$ und erfüllt $x \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ die Voraussetzung (3.2), so gilt

$$\limsup_{\sigma\to 0} \sigma^{-2} \int_{\Omega\cap\{w:|x(w^*)-x(w)|<\sigma\}} |\nabla x|^2 \, d\mathbb{L}^2 \geq 2\pi .$$

Bemerkung:

Ohne (3.2) gilt diese Ungleichung mit $\pi$ statt $2\pi$ nur in den Punkten $w^*$, in denen $x_u$ und $x_v$ linear unabhängig sind.

Beweis:

O.B.d.A. sei $x(w^*)=0$.

Für $\varepsilon>0$ sei $T_\varepsilon := \Omega\setminus\{w:|x(w)-\nabla x(w^*)\,(w-w^*)|\leq\varepsilon|w-w^*|\}$ und

für $\rho>0$ $K_\rho := \{w \in \Omega : |x(w)|<\rho\}$.

Dann gilt

$$\rho^{-2} \int_{K_\rho} |\nabla x|^2 \geq \rho^{-2} \int_{K_\rho\setminus T_\varepsilon} |\nabla x|^2 \geq$$

$$\geq \rho^{-2} \int_{K_\rho\setminus T_\varepsilon} (|\nabla x(w^*)|-|\nabla x(w^*)-\nabla x|)^2 \geq$$

$$\geq \rho^{-2}(1-\varepsilon) \int_{K_\rho\setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*)|^2 -$$

$$- \rho^{-2}(\tfrac{1}{\varepsilon}-1) \int_{K_\rho\setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*)-\nabla x|^2 .$$

Wir verarbeiten zunächst den ersten Term. Dazu sei

$r_\varepsilon := \rho(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon)^{-1}$ und $B_{r_\varepsilon} := B_{r_\varepsilon}(w^*)$.

Es gilt dann $B_{r_\varepsilon}\setminus T_\varepsilon \subset K_\rho\setminus T_\varepsilon$.

Denn ist $w \in B_{r_\varepsilon}\setminus T_\varepsilon$, so ist

$$|x(w)-\nabla x(w^*)(w-w^*)| \leq \varepsilon |w-w^*|.$$

Daraus folgt $|x(w)| \leq \varepsilon|w-w^*| + |\nabla x(w^*)(w-w^*)|$.

Aus den Konformalitätsrelationen schließen wir

$$|\nabla x(w^*)(w-w^*)|^2 \leq \frac{1}{2}|\nabla x(w^*)|^2 |w-w^*|^2.$$

Also $|x(w)| \leq (\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|)|w-w^*| < \rho$.

Wir können deshalb den ersten Term folgendermaßen nach unten abschätzen

$$\rho^{-2}(1-\varepsilon) \int\limits_{K_\rho \setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*)|^2 \geq \rho^{-2}(1-\varepsilon) \int\limits_{B_{r_\varepsilon} \setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*)|^2 =$$

$$= |\nabla x(w^*)|^2 \, \mathbb{L}^2(B_{r_\varepsilon} \setminus T_\varepsilon) \; \rho^{-2}(1-\varepsilon).$$

Es gilt nun

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\mathbb{L}^2(B_{r_\varepsilon} \setminus T_\varepsilon)}{\rho^2} = \pi(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon)^{-2} - \lim_{\rho\to 0} \frac{\mathbb{L}^2(B_{r_\varepsilon} \cap T_\varepsilon)}{\rho^2} =$$

$$= \pi(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon)^{-2}\left[1 - \lim_{\rho\to 0} \frac{\mathbb{L}^2(B_{r_\varepsilon} \cap T_\varepsilon)}{\pi r_\varepsilon^2}\right] =$$

$$= \pi(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon)^{-2}\left[1 - \Theta^2(\mathbb{L}^2 \llcorner T_\varepsilon, w^*)\right] =$$

$$= \pi(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon)^{-2} \quad , \text{ da } w^* \in A.$$

Wir haben also gezeigt

$$\limsup_{\rho\to 0} \rho^{-2}(1-\varepsilon) \int\limits_{K_\rho \setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*)|^2 \geq$$

$$\geq \pi(1-\varepsilon)\left[\frac{|\nabla x(w^*)|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla x(w^*)|+\varepsilon}\right]^2 .$$

Wir wenden uns dem zweiten Term zu.

Für $w \in (K_\rho \setminus T_\varepsilon) \setminus \{w^*\}$ gilt

$$|w-w^*| \geq \frac{1}{\varepsilon} |\nabla x(w^*)(w-w^*) - x(w)| \geq$$

$$> \frac{1}{\varepsilon} \left( |\nabla x(w^*) \frac{w-w^*}{|w-w^*|}| \, |w-w^*| - \rho \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\varepsilon} (\lambda^* |w-w^*| - \rho) \, ,$$

wobei $\lambda^* := \inf_{|z|=1} |\nabla x(w^*) z| > 0$, da $w^* \notin N$.

Weil wir natürlich $\varepsilon < \lambda^*$ annehmen können, folgt

$$|w-w^*| < \rho (\lambda^* - \varepsilon)^{-1} =: \bar{r}_\varepsilon \, .$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \rho^{-2} \int_{K_\rho \setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*) - \nabla x|^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \rho^{-2} \int_{B_{\bar{r}_\varepsilon}} |\nabla x(w^*) - \nabla x|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \pi (\lambda^* - \varepsilon)^{-2} \fint_{B_{\bar{r}_\varepsilon}} |\nabla x(w^*) - \nabla x|^2 \, .$$

Da $w^*$ Lebesguepunkt von $\nabla x$ ist, folgt

$$\limsup_{\rho \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \rho^{-2} \int_{K_\rho \setminus T_\varepsilon} |\nabla x(w^*) - \nabla x|^2 = 0.$$

Wir haben also insgesamt gezeigt

$$\limsup_{\rho \to 0} \rho^{-2} \int_{K_\rho} |\nabla x|^2 \geq (1-\varepsilon) \pi \left[ \frac{|\nabla x(w^*)|}{\frac{1}{\sqrt{2}} |\nabla x(w^*)| + \varepsilon} \right]^2 \, .$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.

Im folgenden Lemma wird gezeigt, daß es genügt $w^* \in A$ zu betrachten, um eine Abschätzung auch für $w^* \in AUN$ zu bekommen.

(3.7) LEMMA

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Kugel, $x \in H_2^1(B,\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{osc}_{\partial B} x \le c_B$ und für jedes $w^* \in A$ gelte

$$\inf_{w \in \partial B} |x(w^*)-x(w)| \le c_B .$$

Dann gilt für fast alle $w^* \in B$

$$\sup_{w \in \partial B} |x(w^*)-x(w)| \le 2c_B .$$

Beweis:

Es sei $\bar{w} \in \partial B$ fest und $z(w) := x(w)-x(\bar{w})$.

Dann gilt für $w \in \partial B$ : $|z(w)| \le c_B$. Für $1 > 2c_B$ definieren wir

$$\xi(w) := \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \le |z(w)| , \\ |z(w)| & \text{für } 1 > |z(w)| > 2c_B , \\ 2c_B & \text{für } 2c_B \ge |z(w)| . \end{cases}$$

Dann ist $\xi - 2c_B \in \overset{\circ}{H}{}_2^1(B,\mathbb{R}) \cap L^\infty$ und fast überall gilt

$$(\xi-2c_B)_u(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \le |z(w)|, \\ \left(\frac{z}{|z|} \cdot z_u\right)(w) & \text{für } 1 > |z(w)| > 2c_B, \\ 0 & \text{für } 2c_B \ge |z(w)| . \end{cases}$$

Ist nun $w \in A$, so $|z(w)| \le c_B + \operatorname{osc}_{\partial B} x \le 2c_B$ ,

so daß $\nabla(\xi-2c_B)(w) = 0$.

Ist aber $w \in N$, so $\nabla z(w) = \nabla x(w) = 0$.

Deshalb $\nabla(\xi-2c_B) = 0$ f.ü. in B, d.h. $\xi \equiv 2c_B$ in B. Damit ist

gezeigt: $|z(w)| \leq 2c_B$ in B, was die Behauptung impliziert.

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Regularitätsbeweis zu, dem wir die nachstehenden Bemerkungen vorausschicken wollen.

Bemerkungen:

(i)

Es genügt zu zeigen, daß x stetig ist auf $\Omega$. Dann folgt nämlich mit dem schon mehrfach benutzten Resultat von Tomi die behauptete Regularität.

(ii)

Dem Beweis liegt folgende Überlegung zugrunde. Betrachtet man eine Kugel mit Mittelpunkt auf der Fläche, so daß die Fläche keinen Rand innerhalb dieser Kugel hat, und ist die mittlere Krümmung der Fläche beschränkt, so kann man den Flächeninhalt, der sich in dieser Kugel befindet, nach unten abschätzen durch eine Konstante, die den Radius der Kugel und eine obere Schranke für die mittlere Krümmung enthält. Solche Abschätzungen für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ finden sich in [01],[02],[03],[04],[18],[20]. Wir bedienen uns der Methode von Michael-Simon [18].

(iii)

Was die Notwendigkeit der Voraussetzungen des Regularitätssatzes betrifft, verweise ich auf §4 meiner Arbeit. Dort wird anhand von mehreren Beispielen gezeigt, daß man auf keine der Voraussetzungen verzichten kann, ohne daß die Aussage des Satzes falsch wird.

(3.8) THEOREM

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $H \in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ und $x \in H_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ sei schwache Lösung des Gleichungssystems

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v$$

auf $\Omega$.

Außerdem gelte fast überall in $\Omega$

$$|x_u|^2 - |x_v|^2 = x_u \cdot x_v = 0.$$

Dann gilt: $x \in C^{1,\beta}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ für jedes $\beta \in ]0,1[$.

Beweis:

Es sei $\|2H\|_{L^\infty} \leq \Lambda$ und $w_o \in \Omega$; wir zeigen Stetigkeit in $w_o$.

Dazu sei $d_o < \operatorname{dist}(w_o, \partial\Omega)$ und $d < d_o$ sei so gewählt, daß

( $B := B_d(w_o)$ , $B_o := B_{d_o}(w_o)$ )

$$D_B := \int_B |\nabla x|^2 < 3\pi\Lambda^{-2}$$

und

$$\operatorname*{osc}_{\partial B} x \leq C D_{B_o}^{1/2} .$$

Daß es möglich ist $d < d_o$ zu finden, so daß auch die letzte Bedingung erfüllt ist, folgt aus (1.11) PROPOSITION.

Sei jetzt x der ausgezeichnete Vertreter aus der Definition der approximativen Differenzierbarkeit.

Wir setzen $c_B := D_{B_o}^{1/2} \max\left\{C, \dfrac{\Lambda D_B^{1/2} + (8\pi - \Lambda^2 D_B)^{1/2}}{4\pi - \Lambda^2 D_B}\right\}$ .

Dann gilt $c_B < c^* D_{B_o}^{1/2}$, wobei $c^*$ eine absolute Konstante

bezeichnet.

Ist nun $w^* \in A \cap B$, $R>0$ und $\inf_{w \in \partial B} |x(w^*)-x(w)| > R$,

so zeigen wir zunächst $2\pi R^2 \le D_B\{1+(\Lambda R)+\frac{1}{2}(\Lambda R)^2\}$.

Aus $D_B < 3\pi\Lambda^{-2}$ werden wir folgern:

Für jedes $w^* \in A \cap B$ gilt $\inf_{w \in \partial B} |x(w^*)-x(w)| \le c_B$.

Es sei also $w^* \in A \cap B$ und o.B.d.A. $x(w^*)=0$ mit

$$\inf \{|x(w)| : w \in \partial B\} > R .$$

Es sei nun $\lambda \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\lambda' \ge 0$ und $\lambda(t)=0$ für $t \in ]-\infty,0]$.

Für $\rho \in ]0,R[$ definieren wir

$$\phi(\rho) := \frac{1}{2} \int_B \lambda(\rho-|x|)|\nabla x|^2 \quad \text{und}$$

$$\psi(\rho) := 2 \int_B \lambda(\rho-|x|)|H(x)||x_u \wedge x_v| .$$

Es gilt $\phi, \psi \in C^1(]0,R[)$ und $\psi(\rho) \le \Lambda\phi(\rho)$ sowie

$\psi'(\rho) \le \Lambda\phi'(\rho)$.

Wir verwenden $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^1_2 \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)$ als Testfunktion, wobei

$\eta$ definiert ist durch ( wegen $R>\rho$ ist $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^1_2$ )

$$\eta(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } w \notin B, \\ \lambda(\rho-|x(w)|)x(w) & \text{falls } w \in B. \end{cases}$$

Für die Ableitung nach u z.B. erhalten wir

$$\eta_u = \lambda(\rho-|x|)x_u - \lambda'(\rho-|x|)\frac{x}{|x|}(x \cdot x_u) .$$

Aus

$$\int_B x_u \cdot \eta_u + x_v \cdot \eta_v = -2 \int_B H(x)\eta \cdot (x_u \wedge x_v)$$

folgt also

$$\int_B |\nabla x|^2 \lambda(\rho-|x|) - \int_B \lambda'(\rho-|x|)\,|x| \left[ \left(\frac{x}{|x|}\cdot x_u\right)^2 + \left(\frac{x}{|x|}\cdot x_v\right)^2 \right]$$

$$\leq 2 \int_B |H(x)|\,|x|\lambda(\rho-|x|)\,|x_u \wedge x_v| .$$

Die Konformalitätsrelationen liefern

$$(x\cdot x_u)^2 + (x\cdot x_v)^2 \leq |x_u|^2 |x|^2 = \frac{1}{2}|\nabla x|^2 |x|^2 ,$$

so daß die folgende Ungleichung richtig ist:

$$\int_B \lambda(\rho-|x|)\,|\nabla x|^2 - \frac{1}{2}\int_B \lambda'(\rho-|x|)\,|x|\,|\nabla x|^2 \leq$$

$$\leq 2 \int_B |H(x)|\,|x|\lambda(\rho-|x|)\,|x_u \wedge x_v| .$$

Da $\lambda'(\rho-|x|)=0$ für $|x|>\rho$ und $\lambda'\geq 0$, gilt

$$|x|\lambda'(\rho-|x|) \leq \rho\lambda'(\rho-|x|) .$$

Und $\lambda(\rho-|x|) = \int_0^\rho \lambda'(\sigma-|x|)\,d\sigma$ impliziert

$$\int_B |H(x)|\,|x|\lambda(\rho-|x|)\,|x_u \wedge x_v| =$$

$$= \int_B |H(x)|\,|x_u \wedge x_v| \int_0^\rho |x|\lambda'(\sigma-|x|)\,d\sigma \leq$$

$$\leq \int_B |H(x)|\,|x_u \wedge x_v| \int_0^\rho \sigma\lambda'(\sigma-|x|)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\rho \sigma\psi'(\sigma)\,d\sigma .$$

Deshalb gilt

$$2\phi(\rho) - \rho\phi'(\rho) \leq \int_0^\rho \sigma\psi'(\sigma)\,d\sigma .$$

Das ist äquivalent zu

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho^2}\right) \leq \rho^{-3}\int_0^\rho \sigma\psi'(\sigma)\,d\sigma .$$

Es folgt

$$(3.9) \qquad -\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho^2}\right) \le \Lambda\rho^{-3}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)\,d\sigma \ .$$

Wir halten hier fest, daß daraus folgt

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho^2}\right) \le \Lambda\,\frac{\phi(\rho)}{\rho^2} \ .$$

Integration liefert für $\rho<\rho'$

$$(3.10) \qquad \phi(\rho)\rho^{-2} \le e^{\Lambda\rho}\phi(\rho)\rho^{-2} \le e^{\Lambda\rho'}\phi(\rho')\rho'^{-2} \ .$$

An (3.10) sehen wir, daß $\phi(\rho)\rho^{-2}$ beschränkt bleibt bei $\rho\to 0$.

Im Rest des Beweises wird die Ungleichung (3.10) verschärft. Dazu fixieren wir $\rho_o \in ]0,R[$ und definieren für $s \in \{0,1,2\}$

$$T_s := \int_0^{\rho_o}\left[\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)\,d\sigma\right]\rho^{-s-1}\,d\rho \ .$$

Sei jetzt $\rho^* \in ]0,\rho_o[$. Wir integrieren die Ungleichung (3.9) von $\rho^*$ bis $\rho_o$.

$$(3.11) \qquad \begin{aligned}\phi(\rho^*)\rho^{*-2} &\le \phi(\rho_o)\rho_o^{-2}+\Lambda\int_{\rho^*}^{\rho_o}\rho^{-3}\left[\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)\,d\sigma\right]d\rho \le \\ &\le \phi(\rho_o)\rho_o^{-2}+\Lambda T_2 \ .\end{aligned}$$

Ist $s=1$ oder $s=2$, so liefert partielle Integration

$$T_s = \left[-\frac{1}{s}\rho^{-s}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)\,d\sigma\right]_0^{\rho_o} + \frac{1}{s}\int_0^{\rho_o}\rho^{1-s}\phi'(\rho)\,d\rho \ .$$

Wir müssen $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^{-2}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)\,d\sigma$ untersuchen.

Es gilt $\rho^{-2}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)d\sigma \le \rho^{-1}\int_0^\rho \phi'(\sigma)d\sigma = \phi(\rho)\rho^{-1}$.

Aus der Bemerkung im Anschluß an (3.10) erkennen wir, daß daraus

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-2}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)d\sigma = 0$$

folgt.

Also
$$T_s \le \frac{1}{s}\int_0^\rho \rho^{1-s}\phi'(\rho)d\rho =$$
$$=\left[\frac{1}{s}\phi(\rho)\rho^{1-s}\right]_0^\rho + \frac{s-1}{s}\int_0^\rho \rho^{-s}\phi(\rho)d\rho =$$
$$= \frac{1}{s}\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \frac{s-1}{s}\int_0^\rho \rho^{-s}\phi(\rho)d\rho.$$

Hierbei wurde erneut $\lim_{\rho\to 0}\phi(\rho)\rho^{-1} = 0$ benutzt.

Eine weitere partielle Integration ergibt

$$\int_0^\rho \rho^{-s}\phi(\rho)d\rho = \int_0^\rho \rho^{2-s}(\rho^{-2}\phi(\rho))d\rho =$$
$$=\left[\frac{1}{3-s}\rho^{1-s}\phi(\rho)\right]_0^\rho + \frac{1}{3-s}\int_0^\rho \rho^{3-s}\left[-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho^2}\right)\right]d\rho \le$$
$$\le \frac{1}{3-s}\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \frac{1}{3-s}\int_0^\rho \rho^{3-s}\Lambda\rho^{-3}\int_0^\rho \sigma\phi'(\sigma)d\sigma d\rho =$$
$$= \frac{1}{3-s}\left\{\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \Lambda T_{s-1}\right\}.$$

Hierbei haben wir (3.9) verwandt.

Für s=1 oder s=2 gilt also

$$T_s \le \frac{1}{s}\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \frac{s-1}{s}\frac{1}{3-s}\left\{\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \Lambda T_{s-1}\right\} =$$
$$= \frac{2}{s(3-s)}\phi(\rho_o)\rho_o^{1-s} + \frac{s-1}{s(3-s)}\Lambda T_{s-1}.$$

Wiederholte Anwendung dieser Ungleichung auf (3.11) ergibt

$$\phi(\rho^*)\rho^{*-2} \le \phi(\rho_o)\rho_o^{-2} + \Lambda\phi(\rho_o)\rho_o^{-1} + \frac{1}{2}\Lambda^2 T_1 \le$$
$$\le \left\{ 1 + (\Lambda\rho_o) + \frac{1}{2}(\Lambda\rho_o)^2 \right\} \phi(\rho_o)\rho_o^{-2} .$$

Wir kommen jetzt zu einer speziellen Wahl von $\lambda$.

Zu $\varepsilon \in ]0,\rho^*[$ sei $\lambda$ so gewählt, daß $\lambda(t)=1$ für $t \ge \varepsilon$ gilt.

Dann schätzen wir ab ( $K_\rho := \{w \in \Omega: |x(w)| < \rho\}$ )

$$\phi(\rho^*)\rho^{*-2} = \frac{1}{2}\rho^{*-2} \int_B \lambda(\rho^* - |x|)\,|\nabla x|^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\rho^{*-2} \int_{B\cap K_{\rho^*}} \lambda(\rho^* - |x|)\,|\nabla x|^2 \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\rho^{*-2} \int_{B\cap K_{\rho^*-\varepsilon}} \lambda(\rho^* - |x|)\,|\nabla x|^2 .$$

Da für $|x(w)| < \rho^* - \varepsilon$ gilt, daß $\lambda(\rho^* - |x(w)|) \ge \lambda(\varepsilon) = 1$ ist, erhalten wir

$$\frac{1}{2}\rho^{*-2} \int_{B\cap K_{\rho^*-\varepsilon}} |\nabla x|^2 \le$$
$$\le \{1 + (\Lambda\rho_o) + \frac{1}{2}(\Lambda\rho_o)^2\} \frac{1}{2}\rho_o^{-2} \int_{B\cap K_{\rho_o}} |\nabla x|^2 .$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt

$$\rho^{*-2} \int_{B\cap K_{\rho^*}} |\nabla x|^2 \le \{1 + (\Lambda\rho_o) + \frac{1}{2}(\Lambda\rho_o)^2\} \rho_o^{-2} \int_{B\cap K_{\rho_o}} |\nabla x|^2 .$$

Da $\rho^* \in ]0,\rho_o[$ beliebig war, folgt mit (3.6) PROPOSITION, indem wir $\rho^*$ gegen Null gehen lassen,

$$2\pi \le \{1 + (\Lambda\rho_o) + \frac{1}{2}(\Lambda\rho_o)^2\} \rho_o^{-2} D_B .$$

Und $\rho_o \to R$ impliziert

$$(3.12) \qquad 2\pi \leq D_B \{ R^{-2} + \Lambda R^{-1} + \tfrac{1}{2}\Lambda^2 \} .$$

Man rechnet leicht nach, daß dies impliziert

$$(3.13) \qquad R \leq D_B^{1/2} \frac{\Lambda D_B^{1/2} + (8\pi - \Lambda^2 D_B)^{1/2}}{4\pi - \Lambda^2 D_B} ,$$

da $D_B < 3\pi\Lambda^{-2}$ ist.

Damit erhalten wir die gewünschte Ungleichung, nämlich daß für jedes $w^* \in A \cap B$ gilt

$$\inf_{w \in \partial B} |x(w^*) - x(w)| \leq c_B .$$

Aus (3.7) LEMMA sehen wir, daß wir für fast alle $w^* \in B$ schließen können

$$\sup_{w \in \partial B} |x(w^*) - x(w)| \leq 2c_B .$$

Daraus folgt zusammen mit $\operatorname{osc}_{\partial B} x \leq c_B$

$$(3.14) \qquad \operatorname{osc}_B x \leq 5c_B \leq 5c^* D_{B_o}^{1/2} .$$

Diese Bedingung aber impliziert die Stetigkeit von x im Mittelpunkt $w_o$ der Kugel B, da $D_{B_o} \to 0$ mit $d_o \to 0$.

Damit ist (3.8) THEOREM bewiesen.

Bemerkungen:

(i)

Die Tatsache, daß die ersten Ableitungen von x hölderstetig sind, impliziert trivialerweise, daß die Konformalitätsrelationen überall bestehen.

(ii)

Aus höherer Regularität von H folgt natürlich höhere Re-

gularität von x, indem man fundamentale Sätze der Potentialtheorie benutzt.

(iii)

Wir wollen zum Schluß darauf hinweisen, daß wir mit derselben Methode wie im Beweis von (3.8) THEOREM eine a-priori Abschätzung des Supremums von $|x|$ erhalten. Man muß dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Differenz des Supremums von $|x|$ zu den Randwerten groß oder klein ist im Verhältnis zu $\Lambda^{-1}$. In jedem Fall kann man das Supremum von $|x|$ abschätzen durch das Supremum der Randwerte und eine additive Konstante, die nur vom Flächeninhalt und einer Schranke für die mittlere Krümmung abhängt.

§ 4

Beispiele

Es stellt sich die Frage, ob man auf eine der Voraussetzungen in (3.8) THEOREM verzichten kann, ohne daß die Regularitätsaussage unrichtig wird.
Wie das eine der beiden folgenden Beispiele zeigt, kann nicht auf die Voraussetzung der Beschränktheit der mittleren Krümmung verzichtet werden.
Eine andere Frage ist, ob man verlangen muß, daß der Flächeninhalt endlich ist. Dies wird durch das zweite Beispiel als notwendig nachgewiesen.
Bemerkungen:
(i)
Im 1. Beispiel ist x schwache Lösung von (1.1), wenn man für Testfunktionen aus $C_c^\infty$ die rechte Seite der Gleichung (1.2) im Sinne eines Hauptwertes versteht.
(ii)
Im 2. Beispiel kann man natürlich gar nicht von schwachen Lösungen im Sinne von (1.2) sprechen, da x nicht im Sobolevraum $H_2^1$ liegt, weil ja der Flächeninhalt nicht als endlich vorausgesetzt wird. Die Gleichung (1.1) gilt deshalb punktweise außerhalb des Nullpunkts.

1. Beispiel
Wir geben ein Beispiel für eine rotationssymmetrische Fläche mit endlichem Flächeninhalt, die auf einer gelochten Kreisscheibe konform parametrisiert ist und unbe-

schränkte mittlere Krümmung hat. Die Fläche ist unbeschränkt, und die Abbildung besitzt eine isolierte Singularität.

Wir benutzen Polarkoordinaten um den Ursprung:

$$u = r\cos\theta \quad , \quad v = r\sin\theta \quad , \; r > 0, \; 0 \le \theta < 2\pi .$$

Für $(r,\theta) \in \,]0,e^{-1}[\times[0,2\pi[$ sei

$$x(r,\theta) := ((\log\tfrac{1}{r})^{-1}\cos\theta, (\log\tfrac{1}{r})^{-1}\sin\theta, F((\log\tfrac{1}{r})^{-1})),$$

wobei $$F(t) := -(1-t^2)^{1/2} + \log\left[t^{-1} + (t^{-2}-1)^{1/2}\right].$$

Es gilt dann

$$F'(t) = -(t^{-2}-1)^{1/2} \text{ und } F''(t) = t^{-2}(1-t^2)^{-1/2}.$$

Die Konformalitätsrelationen

$$|x_u|^2 - |x_v|^2 = 0 = x_u \cdot x_v$$

werden impliziert durch die Bedingungen

$$|x_\theta|^2 - r^2|x_r|^2 = 0 = x_\theta \cdot x_r .$$

Es gilt

$$x_r = r^{-1}(\log\tfrac{1}{r})^{-2}(\cos\theta, \sin\theta, -((\log\tfrac{1}{r})^2-1)^{1/2}),$$

$$x_\theta = (\log\tfrac{1}{r})^{-1}(-\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

Also liegt eine konforme Parametrisierung vor.

Der Flächeninhalt über der Kreisscheibe vom Radius R ist

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla x|^2 = \int_{B_R} r^{-2}|x_\theta|^2 = 2\pi \int_0^R r^{-1}(\log\tfrac{1}{r})^{-2}dr =$$

$$= 2\pi\,(\log\tfrac{1}{R})^{-1} ,$$

also endlich.

Die Gleichung $\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v$

lautet in Polarkoordinaten

$$x_{rr} + r^{-2}x_{\theta\theta} + r^{-1}x_r = 2H(x)\, x_r \wedge r^{-1}x_\theta \,.$$

Als H kann man in diesem Fall auf $B_{1/e} \times \mathbb{R}$

$$H(x^1,x^2,x^3) := [1-\tfrac{1}{2}((x^1)^2+(x^2)^2)^{-1/2}][1-(x^1)^2-(x^2)^2]^{-1/2}$$

nehmen. Man könnte H sogar so wählen, daß es regulär und unbeschränkt ist und nur von $x^3$ abhängt.

2. Beispiel

Wir zeigen jetzt, daß man auf die Bedingung $x \in H_2^1$ nicht verzichten kann. Wir finden nämlich eine rotationssymmetrische Fläche, die auf einer gelochten Kreisscheibe konform parametrisiert ist, für die die Parameterdarstellung zu $H_p^1$ gehört für jedes $p \in [1,2[$ und die überall beschränkte mittlere Krümmung hat. Der Flächeninhalt allerdings ist unendlich und die Fläche selbst unbeschränkt. Die Parametrisierung besitzt eine isolierte Singularität.

Wir benutzen wieder Polarkoordinaten auf der Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{e}$ um den Ursprung und definieren

$$x(r,\theta) := (\log\tfrac{1}{r}\cos\theta, \log\tfrac{1}{r}\sin\theta, F(\log\tfrac{1}{r})),$$

wobei $$F(t) := \tfrac{1}{2}\left[t(t^2-1)^{1/2} - \log(t+(t^2-1)^{1/2})\right].$$

Es gilt dann

$$F'(t) = (t^2-1)^{1/2} \text{ und } F''(t) = t(t^2-1)^{-1/2}.$$

Für die partiellen Ableitungen nach r und $\theta$ erhalten wir

$$x_r = -r^{-1}(\cos\theta, \sin\theta, ((\log\tfrac{1}{r})^2 - 1)^{1/2}) ,$$

$$x_\theta = \log\tfrac{1}{r}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) .$$

Also haben wir konform parametrisiert.

Daß die Fläche unbeschränkt ist und die Parametrisierung im Nullpunkt singulär wird, ist offensichtlich.

Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla x|^2 = \int_{B_R} r^{-2}|x_\theta|^2 = 2\pi \int_0^R r^{-1}(\log\tfrac{1}{r})^2 dr = \infty .$$

Es sei nun $p<2$, dann gilt

$$\int_{B_R} |\nabla x|^p = 2\int_{B_R} (\log\tfrac{1}{r})^p r^{-p} = 4\pi \int_0^R (\log\tfrac{1}{r})^p r^{1-p}\, dr .$$

Also $\int_{B_R} |\nabla x|^p < \infty$ , d.h. $x \in H_p^1(B_R(0), \mathbb{R}^3)$.

Auf $(\mathbb{R}^2 \setminus B_2) \times \mathbb{R}$ kann man $H(x) := -\frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1]^{-1/2}$ wählen.

Wie oben kann man H auch nur von $x^3$ abhängen lassen.

Bemerkungen:

Man kann sich weiter fragen, ob man die Konformität der Parameter voraussetzen muß, um die Regularität zu beweisen. Bei der Untersuchung dieser Frage muß man beachten, daß im Fall von nichtkonformen Parametern die Begriffe Flächeninhalt und Dirichletintegral auseinanderfallen. Setzt man nur die Endlichkeit des Flächeninhalts und die Gleichung (1.1) voraus, so zeigt sich, daß selbst im Fall $H \equiv 0$ Lösungen nicht regulär sein müssen.

Die Funktion $x(u,v):=(u,v,-\log[(u^2+v^2)^{1/2}])$ ist nämlich harmonisch, erfüllt also $\Delta x=2H(x)x_u\wedge x_v$ mit $H\equiv 0$, und ihr Graph über der Einheitskreisscheibe hat endlichen Flächeninhalt, aber unendliches Dirichletintegral.

Es bleibt ungeklärt, ob Beschränktheit der Funktion H und die Endlichkeit des Dirichletintegrals einer schwachen Lösung x von $\Delta x=2H(x)x_u\wedge x_v$ schon ausreichen, die Regularität von x sicherzustellen, auch wenn x nicht konform parametrisiert ist. Selbst unter der zusätzlichen Voraussetzung (2.5) an H ist im allgemeinen nur partielle Regularität bekannt ( (2.3) THEOREM ). Andererseits zeigt (2.15) THEOREM, daß keine isolierten Singularitäten vorhanden sein können. Gegenbeispiele gegen die Regularität von schwachen Lösungen x von $\Delta x=2H(x)x_u\wedge x_v$ mit endlichem Dirichletintegral und beschränktem H können daher zumindest nicht so einfach sein wie die zwei obigen Beispiele.

Zusammenfassung

Ich untersuche schwache Lösungen des Systems $\Delta x=2H(x)x_u \wedge x_v$. Hierbei handelt es sich um ein nichtlineares elliptisches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, bei dem die rechte Seite quadratisch in den ersten Ableitungen der Lösung wächst. Dieses System ist von geometrischem Interesse, weil im Fall von konformen Parametern H die mittlere Krümmung der Fläche x ist. Aus der allgemeinen Theorie erhält man Regularitätsaussagen für dieses System nur, wenn man Kleinheit von H und Beschränktheit der Lösung voraussetzt. Meine Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten gebe ich einen neuen Beweis für partielle Regularität von Lösungen mit endlichem Dirichletintegral, wenn man die Beschränktheit von H voraussetzt und die Ableitung von H einer Wachstumsbedingung genügt. Ich charakterisiere die mögliche Ausnahmemenge, indem ich zeige, daß die 2-Kapazität verschwindet. In einem weiteren Satz beweise ich, daß allein unter der Voraussetzung der Beschränktheit von H isolierte Singularitäten ausgeschlossen werden können. Im zweiten Teil behandele ich das Regularitätsproblem unter der zusätzlichen Annahme, daß die Fläche konform parametrisiert ist, die Gleichung also eine geometrische Interpretation zuläßt. Der von mir bewiesene Satz garantiert dann, daß die Lösungen regulär sind, wenn die mittlere Krümmung beschränkt ist und die Fläche endlichen Flächeninhalt hat. Im letzten Teil zeige ich durch Beispiele, daß die Voraussetzungen des Regularitätssatzes wirklich notwendig sind.

Literaturverzeichnis

[01] H. Alexander - D. Hoffman - R. Osserman, Area estimates for submanifolds of euclidean space, INDAM Symposia Math., Vol. 14(1974),445-455.

[02] H. Alexander - R. Osserman, Area bounds for various classes of surfaces, Amer. J. Math., Vol. 97, No. 3(1975),753-769.

[03] W. K. Allard, On the first variation of a varifold, Ann. of Math., Vol. 95, No. 3(1972),417-491.

[04] W. K. Allard, A characterization of the area integrand, INDAM Symposia Math., Vol. 14(1974),429-444.

[05] H. Federer, Geometric measure theory, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1969.

[06] H. Federer - W. P. Ziemer, The Lebesgue set of a function whose distribution derivatives are p-th power summable, Indiana Univ. Math. J., Vol. 22, No. 2(1972),139-158.

[07] J. Frehse, On two-dimensional quasi-linear elliptic systems, Manuscripta Math., 28(1979),21-49.

[08] M. Giaquinta - E. Giusti, Nonlinear elliptic systems with quadratic growth, Manuscripta Math., 24(1978), 323-349.

[09] M. Giaquinta - G. Modica, Almost-everywhere regularity results for solutions of non linear elliptic systems, Manuscripta Math., 28(1979),109-158.

[10] E. Giusti, Precisazione delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari, Boll. UMI 2(1969),71-76.

[11] M. Grüter, Ein Hebbarkeitssatz für isolierte Singularitäten, Preprint 177, SFB 72 Bonn(1978).

[12] E. Heinz, Elementare Bemerkung zur isoperimetrischen Ungleichung im $\mathbb{R}^3$, Math. Z. 132(1973),319-322.

[13] E. Heinz, Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II 1975, No. 1,1-13.

[14] S. Hildebrandt - K.-O. Widman, Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order, Math. Z. 142(1975),67-86.

[15] S. Hildebrandt - K.-O. Widman, On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (Serie IV), 4(1977),145-178.

[16] P.-A. Ivert, Regularitätsuntersuchungen von Lösungen elliptischer Systeme von quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. 31, Linköping University 1978.

[17] H. Lewy - G. Stampacchia, On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 22(1969),153-188.

[18] J. H. Michael - L. M. Simon, Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of $\mathbb{R}^n$,

Comm. Pure Appl. Math., Vol. 26(1973),361-379.

[19] C. B. Morrey jr., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

[20] R. Osserman, Isoperimetric and related inequalities, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 27, Amer. Math. Soc. Providence R. I. 1975,207-215.

[21] J. Sacks - K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Preprint.

[22] F. Tomi, Ein einfacher Beweis eines Regularitäts-satzes für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme, Math. Z. 112(1969),214-218.

[23] F. Tomi, Bemerkungen zum Regularitätsproblem der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, Math. Z. 132(1973),323-326.

[24] H. Wallin, A connection between α-capacity and $L^p$-classes of differentiable functions, Ark. Mat. 5 (1964),331-341.

[25] H. C. Wente, An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, J. Math. Anal. Appl. 26(1969), 318-344.

[26] H. C. Wente, A general existence theorem for surfaces of constant mean curvature, Math. Z. 120(1971), 277-288.

[27] M. Wiegner, Über die Regularität schwacher Lösungen gewisser elliptischer Systeme, Manuscripta Math.,15 (1975),365-384.

[28] M. Wiegner, Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme, Math. Z. 147(1976),21-28.

[29] M. Wiegner, A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme, Manuscripta Math., 18 (1976),279-297.

Lebenslauf

Am 8.9.1953 wurde ich als erstes Kind des Architekten Gert Grüter und seiner Ehefrau Maria, geb. Jansen, in Duisburg geboren. Meine Schwester Ulrike kam am 24.3.1955 zur Welt.

Ab Ostern 1960 besuchte ich bis Weihnachten 1960 die katholische Volksschule an der Bismarckstraße in Duisburg-Neudorf. Nach einem Umzug war ich von Weihnachten 1960 bis Ostern 1964 Schüler der katholischen Volksschule an der Münchener Straße in Duisburg-Buchholz.

Ostern 1964 kam ich zum Landfermann-Gymnasium in Duisburg, wo ich im Mai 1972 das Abitur bestand. Zum Wintersemester 1972/73 immatrikulierte ich mich an der Rheinischen-Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn. Dort schrieb ich unter der Anleitung von Prof. Dr. S. Hildebrandt eine Diplomarbeit und legte im Dezember 1976 die Diplomprüfung in Mathematik mit Nebenfach Philosophie ab. Seit Dezember 1976 bin ich als Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf, Lehrstuhl Reine Mathematik III, Prof. Dr. K. Steffen, tätig. Im März 1979 war ich auf Einladung der Universität Linköping (Schweden) vier Wochen Gast des dortigen Mathematischen Instituts.

Ich heiratete im März 1979 Ingrid Alpes aus Duisburg.